0 La correction figure sur un fichier à part.

1 **1.** Dans chaque cas, traduire les conditions pour former un système d'inéquations et d'équations :

a) $f(x)$ est défini ssi $\begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \end{cases}$

Faire un tableau de signe pour traduire la deuxième condition.
Solution : $[-1,1[$.

b) $f(x)$ est défini ssi $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x < 1 \\ (x-3)^2 < 4 \end{cases}$

Ne pas oublier la valeur absolue pour traduire la dernière condition.
Solution : $]1,e[$.

c) $f(x)$ est défini ssi $e^x + 2e^{-x} - 3 \geq 0$ *i.e.* (en multipliant par $e^x > 0$) ssi $\underbrace{(e^x)^2 - 3e^x + 2}_{\underset{X=e^x}{=} X^2-3X+2} \geq 0$.

Déterminer les racines x_1 et x_2 du trinôme $X^2 - 3X + 2$.
Ensuite $f(x)$ est défini ssi $e^x \leq x_1$ ou $e^x \geq x_2$.
Solution : $\mathbb{R}_- \cup [\ln 2, +\infty[$.

2. Utiliser le savoir faire **SF 5** :

a) $f = \sqrt{u}$ où u est la fonction $u : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$: utiliser le savoir faire **SF 5** avec $v = \sqrt{\cdot}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Solution : $]-1,1[$.

b) $f = \dfrac{\ln u}{\sqrt{v}}$ avec $u : x \mapsto 1 - \ln x$ et $v : x \mapsto 4 - (x-3)^2$.

Justifier la dérivabilité de $\ln u$ et de $\sqrt{v}$ sur $]1,e[$ en utilisant le savoir faire **SF 5**. Conclure par quotient.
Solution : $]1,e[$

c) $f = \sqrt{u}$ où u est la fonction $u : x \mapsto e^x + 2e^{-x} - 3$: utiliser le savoir faire **SF 5** avec $v = \sqrt{\cdot}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Solution : $]-\infty, 0[\cup]\ln 2, +\infty[$.

2 **1.** Egaler les valeurs en 0 et en T.

2. Les dérivées d'une fonction T-périodique sont encore des fonctions T-périodiques, de même que les combinaisons linéaires de fonctions T-périodiques.

3 **1.** *Solution :* $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Calculer $f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, utiliser la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2+1} + x = \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x}$. Utiliser enfin les propriétés du logarithme : f est impaire.

4

5 Revenir à la définition : considérer deux réels x, y tels que $x < y$, il s'agit de montrer que $f(x) > f(y)$.
Puisque $x < y$ la stricte décroissance de $f \circ f \circ f$ permet d'écrire : $f \circ f\big(f(x)\big) > f \circ f\big(f(y)\big)$.
Conclure en utilisant la croissance de $f \circ f$.

6 On ne peut pas dériver : revenir à la définition.
Considérer deux réels x, y tels que $x < y$, il s'agit de montrer que $f(x) < f(y)$.
L'hypothèse permet d'écrire $f(x)e^{f(x)} < f(y)e^{f(y)}$ *i.e.* $\varphi\big(f(x)\big) < \varphi\big(f(y)\big)$ où φ est la fonction $\varphi : t \mapsto te^t$.
Conclure en montrant que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

7 Si T est une période de f, il suffit de montrer que f est constante sur $[0,T]$.
Pour tout $x \in [0,T]$, montrer que $f(x) = f(0)$ en utilisant la croissance de f, le fait que $0 \leq x \leq T$ et le fait que $f(0) = f(T)$.

8 **1. a)** Prendre $x = y = 0$ dans l'égalité de départ : on obtient $f(0) = 0$ ou 1.
Montrer que $f(0) = 0$ est impossible en évaluant l'égalité $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ en deux valeurs de x et y judicieusement choisies.

b) Evaluer l'égalité $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ en une valeur de y bien choisie.

2. Il s'agit de tester si le candidat $f : x \mapsto x + 1$ est solution du problème de départ.
Considérer deux réels x, y et calculer $f(x)f(y) - f(x)f(y)$

9 Procéder par analyse-synthèse.
Les solutions sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto kx$ où k décrit $\mathbb{R}$.

10 Par analyse-synthèse :

1.
- *Analyse*. Si f est solution. Ecrire l'égalité de l'énoncé avec x puis avec $1-x$, on obtient un système
$$\begin{cases} f(x) + xf(1-x) = 1 + x \\ (1-x)f(x) + f(1-x) = 2 - x \end{cases}$$
Combiner les deux équations pour éliminer $f(1-x)$, on obtient $f(x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- *Synthèse*. Si $f : x \mapsto 1$ calculer $f(x) + xf(1-x)$ pour vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

2.
- *Analyse*. Si f est solution. Ecrire l'égalité de l'énoncé avec $y = f(x) + x$, on obtient $f(x) = 1 - x$.
- *Synthèse*. Si $f : x \mapsto 1 - x$ calculer $f\big(y - f(x)\big)$ pour vérifier que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.

11

1. Procéder par analyse-synthèse.
Les solutions sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \alpha x$ où α décrit $\mathbb{R}$.

2.

12 **a)** f est définie sur $]-1,1[$ et est impaire, il suffit de l'étudier sur $[0,1[$ puis de compléter par imparité.

x	-1		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) f est définie sur $[-1,1]$ et est paire, il suffit de l'étudier sur $[0,1]$ puis de compléter par imparité.

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

c) On a besoin de dériver deux fois pour accéder au signe de f'.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

13 Etudier les variations de $f : x \mapsto (x-1)e^x - xe + 1$ pour déterminer le nombre de fois où f s'annule.
On obtient $f'(x) = xe^x - e$.
On ne sait pas résoudre à la main l'inéquation $f'(x) \geq 0$, le plus simple est de dériver deux fois. On obtient le signe de f'' donc les variations de f'.
Pour accéder au signe de f' remarquer que $f'(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $f'(1) = 0$.
La fonction f' est donc négative sur $]-\infty, 1[$ puis positive.
On obtient les variations de f et le calcul des limites et de $f(1)$ permet de voir que f s'annule deux fois.

14 **1.**

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\ -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. L'équation équivaut à $f(x) = k$.
Le nombre de solutions se lit sur le tableau de f :

- Si $k > \frac{1}{e}$, il n'y a aucune solution ;
- Si $0 < k < \frac{1}{e}$, il y exactement deux solutions ;
- Si $k \leq 0$ ou $k = \frac{1}{e}$, il y a une unique solution.

3. On trouve à tâton deux solutions : $x = 2$ et $x = 4$.
La question **2.** assure qu'il ne peut y en avoir plus, ce sont donc les seules.

15 **1.** La fonction tangente à f au point a est la fonction affine :

$$T_a : x \mapsto \ln(a) - 1 + \frac{x}{a}$$

Par définition, $g(a)$ est le réel x tel que $T_a(x) = 0$.
La résolution de l'équation $T_a(x) = 0$ donne

$$g(a) = a - a\ln a$$

2. Une tangente passe par $M(\alpha, 0)$ ssi il existe $a > 0$ tel que $g(a) = \alpha$. Il s'agit de chercher les valeurs de α pour lesquelles l'équation $g(a) = \alpha$ possède deux solutions.
Dresser le tableau de variation de g pour répondre à la question.
Réponse : pour $\alpha \in]0, 1[$.

16 Il s'agit de montrer que $a = 1$ est l'unique solution de l'équation $f'(a) = 1$.
Après calcul de $f'(a)$: $\quad f'(a) = 1$ ssi $\underbrace{a^3 + 2\ln a - 1}_{\varphi(a)} = 0$.

Etudier ensuite les variations de φ pour montrer que φ ne s'annule qu'en $a = 1$.

17 Suivre l'indication en considérant $\varphi : t \mapsto f'(t)\sin(t-x) - f(t)\cos(t-x)$.
Constater que $\varphi(x) = -f(x)$ et que $\varphi(x+\pi) = f(x+\pi)$ donc il s'agit de montrer que $\varphi(x+\pi) \geq \varphi(x)$.
Il suffit de montrer que φ est croissante sur l'intervalle $[x, x+\pi]$.
Pour cela calculer $\varphi'(t)$, on obtient $\varphi'(t) = \big(f''(t) + f(t)\big)\sin(t-x)$.

18 **1.** Dériver deux fois (en justifiant la dérivabilité)

2. Utiliser : $\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

19 En notant f la fonction $x \mapsto x\ln x$ il s'agit de montrer que

$$(a+b)f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leq af\left(\frac{x}{a}\right) + bf\left(\frac{y}{b}\right)$$

ou encore

$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leq \frac{a}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right)$$

Pour ce faire, montrer que f est convexe puis utiliser judicieusement la définition de la convexité de f.

20 Observer que $-\sum_{i=1}^{n} t_i \ln t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \ln\left(\frac{1}{t_i}\right)$ puis appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction ln pour majorer la somme. La minoration repose sur le fait que les $\ln t_i$ sont tous négatifs.

21 **1.** Dériver deux fois (en justifiant la dérivabilité)

2. Comparer les logarithmes. Les propriétés de ln permettent d'écrire :

$$\ln\Big((1+x_1)^{\frac{1}{n}} \dots (1+x_n)\Big)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\Big(\underbrace{\ln(1+x_1)}_{=f(\ln x_1)} + \dots + \underbrace{\ln(1+x_n)}_{=f(\ln x_n)}\Big)$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Jensen.

3. Factoriser par $(a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$ pour faire apparaître un produit de la forme $1 + (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ puis utiliser **2.**

22 Appliquer l'inégalité de Jensen à $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}$ pour minorer $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}$

23 Pour montrer qu'une fonction à la fois convexe et concave est affine, on peut par exemple montrer puis exploiter le fait que $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est constante.

24 Poser $g = \dfrac{1}{f}$ et revenir à la définition *i.e.* montrer que :

$$\forall a, b \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad g\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)g(a) + tg(b)$$

Il s'agit de majorer : $\quad \dfrac{1}{f\big((1-t)a+tb\big)}$.

Pour cela utiliser :

- La concavité de f
- La convexité de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

25 Revenir à la définition *i.e.* montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t \in [0,1], \quad h\big((1-t)a+tb\big) \leq (1-t)h(a) + th(b)$$

Il s'agit de majorer :

$$h\big((1-t)a+tb\big) = \big((1-t)a+tb\big)g\left(\frac{1}{(1-t)a+tb}\right)$$

Pour cela :

- Remarquer que $m = \dfrac{1}{(1-t)a+tb}$ est entre $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$ donc il existe $s \in [0,1]$ tel que $m = (1-s)\dfrac{1}{a} + s\dfrac{1}{b}$.
- Utiliser la convexité de la fonction g pour majorer $g(m)$
- Déterminer enfin une expression de s en fonction de t

26 Utiliser la décroissance de la fonction $\tau_0 : t \mapsto \dfrac{f(t)-f(0)}{t}$

27 **1.** Etant donné $x \in [a, b]$ il s'agit de montrer que $\varphi(x) \leq M$ où $M = \max\big(\varphi(a), \varphi(b)\big)$.
On peut par exemple écrire $x = (1-t)a + tb$ pour un certain $t \in [0,1]$ puis exploiter la convexité de f pour majorer $\varphi(x) = \varphi\big((1-t)a + tb\big)$.

2. Par hypothèse, il existe $x \in]a, b[$ tel que :

$$(\star) \quad f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le réel $\mu = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ convient. Cette valeur de μ est choisir pour que $\varphi(a) = \varphi(b)$ et l'inégalité $(\star)$ assure que $\varphi(x) > \varphi(a)$.

28 Etant fixé $a \in \mathbb{R}$, l'hypothèse faite sur f assure qu'il existe $u < v$ tels que :

$$\tau_a(u) < \tau_a(v)$$

En prenant x tel que $x > v$ et $a - x < u$, exploiter la convexité de f pour montrer que :

- $f(x) \geq f(a) + \tau_a(v)(x - a)$
- $f(a - x) \geq f(a) - \tau_a(u)x$

Il suffit de sommer les deux inégalités obtenus et d'utiliser le fait que $\tau_a(v) - \tau_a(u) > 0$.

29 **a)** Utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. *Réponse :* $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
b) $2x \in [0, \pi]$ et $\cos 2x$ est connu, cela permet de trouver $2x$

30 Utiliser $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{8}$
On trouve que $x = \tan\dfrac{\pi}{8}$ vérifie : $\quad x^2 + 2x - 1 = 0$.
Trouver les racines du trinôme du second degré, puis éliminer l'une des deux par des considérations de signe.

31 Il s'agit de montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$2\cos\Big(\frac{\pi}{2^n}\Big) = u_{n-1}$$

où (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \geq 0$.
L'égalité ci-dessus se démontre par récurrence sur n.

32 Exploiter la convexité de tan sur $[0, \dfrac{\pi}{4}]$.

33 **a)** L'équation équivaut à $\sin x = \sin(-2x)$.
Utiliser le théorème concernant l'égalité $\sin\theta = \sin\varphi$.
Solutions dans $]-\pi, \pi[$: $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$ et π.
b) L'équation équivaut à $\cos 3x = \cos 2x$.
Utiliser le théorème concernant l'égalité $\cos\theta = \cos\varphi$.
Solutions dans $]-\pi, \pi[$: $-\frac{4\pi}{5}$, $-\frac{2\pi}{5}$, 0, $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$.

34 Dans chaque cas, utiliser la technique pour transformer de $a\cos t + b\sin t$ (en factorisant par $\sqrt{a^2 + b^2}$).
a) Par la technique ci-dessus donne

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$$

On résout alors : $\quad \cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0$.
Solutions $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi]$
b) La technique ci-dessus donne

$$\sqrt{6}\cos 2x + \sqrt{2}\sin 2x = 2\sqrt{2}\cos(2x - \frac{\pi}{6})$$

On résout alors : $\quad \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{3\pi}{4})$.
On utilise le théorème concernant l'égalité $\cos\theta = \cos\varphi$.
Solutions : $x \equiv \frac{11\pi}{24}\ [\pi]$ ou $x \equiv -\frac{7\pi}{24}\ [\pi]$

35 **a)** Utiliser la formule : $\quad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
pour le membre de gauche.
Ensuite tout passer à gauche pour se ramener à une équation de la forme $\cdots = 0$
Solutions : $x \equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{9}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \frac{2\pi}{9}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$
b) Utiliser la formule : $\quad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
pour factoriser $\cos x + \cos 5x$.
Ensuite factoriser par $\cos 3x$ le résultat.
Solutions : $x \equiv \frac{\pi}{6}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]$

36 **a)** Utiliser $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.
Ensuite tout passer à gauche pour se ramener à une équation de la forme $\cdots = 0$
On trouve que l'équation équivaut à

$$\tan x = 0 \quad \text{ou} \quad \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On conclut à l'aide des valeurs remarquables de la fonction tan et de sa π-périodicité.
Solutions : $x \equiv 0\ [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi]$
b) Remplacer $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et $\sin(2x)$ par $2\sin x\cos x$.
L'équation équivaut à : $\quad \cos^2 x = 0$ ou $-1 + 2\sin^2 x = 0$.
Solutions : $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

37 Etudier la fonction $f : t \mapsto e^t \sin t$ sur $[0, \pi]$ pour trouver son maximum.

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

38 Remarquer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\quad |x| \geq x^2$.

39 Si $0 < |\cos x| < 1$ montrer que $(\cos x)^3 + (\sin x)^3 < 1$.
Les seuls candidats solutions sont :

- les x tels que $\cos x = 0$ *i.e.* $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$
- les x tels que $|\cos x| = 1$ *i.e.* $x \equiv 0\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi\ [2\pi]$

Il suffit de tester toutes ses valeurs.On constate que les seules solutions sont les x tels que $x \equiv 0\ [2\pi]$ et $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

40 Si f est solution, montrer que la fonction $\dfrac{f^2}{2} + \cos$ est constante.

41 **1.** Utiliser $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{6}$ (ou constater que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ et utiliser la formule concernant $\tan(a - b)$).
Réponse : $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

2. Fixer $\theta_1 < \cdots < \theta_n$ tous dans $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ tels que $x_i = \tan\theta_i$.
Il s'agit de montrer qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que :

$$\tan(\theta_{i+1} - \theta_i) < \tan\frac{\pi}{12}$$

Procéder par l'absurde *i.e.* supposer :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \tan(\theta_{i+1} - \theta_i) \geq \tan\frac{\pi}{12}$$

La stricte croissance de tan donne alors

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \theta_{i+1} - \theta_i \geq \frac{\pi}{12}$$

On en tire une contradiction en sommant ces inégalités