Inégalités par récurrence

1 SF 1 SF 9 Soit $x \in [0,1]$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-x)^n \geq 1-nx$

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-x)^n \leq \dfrac{1}{1+nx}$

2 SF 10 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+2} = (n+1)(u_{n+1} + u_n)$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (n-1)! \leq u_n \leq n!$

3 SF 11 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leq n!$

4 SF 9 Montrer que pour tout $n \geq 1$: $\quad 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

5 SF 9 Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$(2n+1)\frac{\sqrt{n}}{3} \leq 1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leq (2n+2)\frac{\sqrt{n}}{3}$$

6 SF 9 Montrer que pour tous $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(a_1 + \cdots + a_n) \times \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Inégalités et opérations

7 SF 2 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :
a) $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x+2}{x+3}$. **b)** $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geq 1$.

8 SF 4 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :
a) $\sqrt{2x - x^2} \leq x - 1$. **b)** $x + \sqrt{x+1} < 5$.
c) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < x - 3$.

9 SF 2 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :
a) $\dfrac{x+1}{2} - \sqrt{x} \leq \dfrac{(x-1)^2}{8}$. **b)** $\dfrac{(x-1)^2}{8x} \leq \dfrac{x+1}{2} - \sqrt{x}$.

10 Montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $\quad x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.
En déduire : $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leq \frac{4}{3}$.

11 SF 4 Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x : $\quad \sqrt{1+x^2} - x \leq m$.

12 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que :

$$(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+ac+bc)$$

Inégalités et substitutions

13 SF 1 SF 5

1. Montrer que pour tous $x, y \geq 0$: $\quad \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$.

2. En déduire que pour tous $x, y > 0$:

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{xy}$$

14 SF 5 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $\quad s = a+b+c$.

1. Montrer que pour tous $x, y > 0$: $\quad \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$.

2. En déduire : **a)** $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 6 - s$ **b)** $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{s}$

15 SF 5

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad 4xy \leq (x+y)^2$.

2. En déduire que pour tous $x, y, z > 0$:

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq \frac{x+y+z}{2}$$

16 SF 5

1. Montrer que pour tous $x, y, z > 0$: $\quad \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{z^2} \geq 2\dfrac{x}{z}$

2. En déduire que pour tous $x, y, z > 0$:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$$

Valeur absolue

17 SF 5 Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$.

a) Montrer que : $\quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

b) En déduire que si $x \geq y$: $\quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$

c) En déduire que : $\quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$

18 SF 3 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :
a) $|x-1| \leq |2x+1| + 1$. **b)** $x + \dfrac{1}{x} \leq |x+4| + 3$.
c) $x^2 - 4|x| + 3 > 0$. **d)** $\sqrt{|x-3|} \leq x - 1$.

Partie entière

19 SF 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\left\lfloor \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$.

20 SF 6

a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$

b) Trouver $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \neq \lfloor x+y \rfloor$

c) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

21 SF 6 **1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $n = \lfloor x \rfloor$, exprimer en fonction de n les quantités suivantes :

a) $\lfloor x-4 \rfloor$ **b)** $\lfloor 2x-1 \rfloor$ *Indication : Distinguer deux cas suivant que $x \in [n, n+\frac{1}{2}[$ ou $x \in [n+\frac{1}{2}, n+1[$*

2. Résoudre l'équation d'inconnue x : $\lfloor x-4 \rfloor = \lfloor 2x-1 \rfloor$.

22 SF 6 Résoudre l'équation d'inconnue x : $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor$.

23 SF 6 SF 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left\lfloor \sqrt{x^2+x} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$
Indication : Poser $n = \lfloor x \rfloor$ et écrire : $x = n + d$ où : $d \in [0, 1[$.

24 SF 6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\lfloor \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2+1}}}} \right\rfloor = n$$

25 SF 6 Montrer que pour tout réel x : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
Indication : Distinguer deux cas suivant la parité de $\lfloor x \rfloor$.

26 SF 6 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
Indication : Considérer la division euclidienne : $\lfloor x \rfloor = nq + r$

27 SF 6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer : $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

28 SF 6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $i, j \in [\![0, n]\!]$ tels que $i < j$ et un entier $m \in \mathbb{Z}$ pour lesquels : $\left| x_{i+1} + \cdots + x_j - m \right| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Fonctions et inégalités

29 SF 7 Démontrer que :

a) pour tout $x \geq 1$: $\ln x \leq \sqrt{x}$

b) pour tout $x \geq 0$: $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

c) pour tout $x \leq 0$: $1 - x + \dfrac{x^2}{2} \leq e^{-x}$

d) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$: $x^{n+1} \geq (n+1)x - n$.

30 SF 7 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{e^x - 1}{x} \geq x + e - 2$.

31 SF 7 **1.** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \quad xy \leq x \ln x + e^{y-1}$.

2. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $z \in \mathbb{R}$: $xyz \leq x \ln x + e^{x \ln x - 1} + y \ln y + e^{y \ln y - 1} + e^{z-1}$.

32 SF 8 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dérivable et telle que f' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

33 SF 7 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$: $e^x \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

34 SF 7 Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leq y < 1$. Montrer que :

$$e^{x \ln x} + e^{y \ln y} \geq e^{y \ln x} + e^{x \ln y}$$

Qu'en est-il si $y \geq 1$?

Inégalité des accroissements finis

35 SF 13 Etablir : $\forall x, y \geq 1, \quad \left| \ln(1+x) - \ln(1+y) \right| \leq \frac{1}{2} |x-y|$

36 SF 12 Etablir : $\forall x \in [0, 1], \quad x \leq e^x - 1 \leq x e^x$

37 SF 13 SF 14 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ puis $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer l'unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

3. Montrer que (u_n) converge vers α.

4. Déterminer un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

38 SF 13 SF 14 On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(\cos^2 x)$.

1. a) Montrer que $[0, 1]$ est stable par f, et montrer que f est $\frac{\sqrt{3}}{2}$-lipschitzienne sur $[0, 1]$.

b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(\cos^2 u_n)$$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

39 SF 13 SF 14 On considère la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{4} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. a) Montrer que l'intervalle $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$ est stable par f et que f est $\frac{4}{9}$-lipschitzienne sur $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$

b) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

2. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^*$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.