1 **a)** Procéder par récurrence sur n.

Pour l'hérédité, multiplier l'inégalité : $(1-x)^n \geq 1-nx$ par $1-x$ puis montrer que $(1-nx)(1-x) \geq 1-(n+1)x$.

b) Procéder par récurrence sur n.

Pour l'hérédité, multiplier l'inégalité : $(1-x)^n \geq \dfrac{1}{1+nx}$ par $1-x$ puis montrer que $\dfrac{1-x}{1+nx} \geq \dfrac{1}{1+(n+1)x}$ en simplifiant la différence : $\dfrac{1-x}{1+nx} - \dfrac{1}{1+(n+1)x}$ pour montrer qu'elle est positive.

2 Procéder par récurrence double sur n.
Pour l'hérédité, sommer les deux encadrements :
$(n-1)! \leq u_n \leq n!$ et $n! \leq u_{n+1} \leq (n+1)!$
puis multiplier par $(n+1)$: le terme central est alors u_{n+2}
reste à montrer que le terme le plus à gauche est supérieur à $(n+1)!$ et que le terme le plus à droite est inférieur à $(n+2)!$.

3 Procéder par récurrence forte sur n.
Pour l'hérédité, sommer toutes les majorations :
$u_0 \leq 0!$, $u_1 \leq 1!$, $\ldots$ et $u_n \leq n!$
puis montrer que $0!+1!+\cdots+n! \leq (n+1)!$
pour cela on peut majorer tous les termes de la somme par le plus grand c'est à dire constater que :
$0! \leq n!$, $1! \leq n!$, $\ldots$ et $n! \leq n!$

4 Procéder par récurrence sur n.
Pour l'hérédité, ajouter $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ à l'inégalité :

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

puis montrer que $2\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$ en simplifiant la différence : $2\sqrt{n+1}-\left(2\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

Pour simplifier $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, le plus simple est d'utiliser la quantité conjuguée : $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

5 Procéder par récurrence sur n.
Pour l'hérédité, il s'agit de montrer :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} - \frac{2n+3}{3}\sqrt{n+1} \underset{①}{\geq} 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} - \frac{2n+4}{3}\sqrt{n+1} \underset{②}{\leq} 0$$

Pour établir ①, en « sortant » le dernier terme de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} - \frac{2n+3}{3}\sqrt{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$$

Utiliser l'hypothèse de récurrence pour minorer la somme puis simplifier $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ à l'aide de la quantité conjuguée : $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
Procéder de même pour la majoration ②.

6 On peut procéder par récurrence. Pour l'hérédité on peut utiliser l'inégalité $t+\dfrac{1}{t} \geq 2$ (à démontrer) pour minorer chaque terme $\dfrac{a_{n+1}}{a_i}+\dfrac{a_i}{a_{n+1}}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

7 Dans chaque cas, ne pas oublier de commencer par déterminer l'ensemble de définition de l'équation.
Ensuite utiliser le savoir-faire : SF 2.
Ensembles des solutions :
a) $]-\infty,-3[\,\cup\,]-1,+\infty[$ **b)** $[-2,-1[\,\cup\,]1,3]$

8 **a)** Ne pas oublier de commencer par déterminer l'ensemble de définition de l'équation.
Ensuite distinguer les cas $x<1$ et $x \geq 1$.
Dans le cas où $x \geq 1$ utiliser le savoir-faire : SF 4
Ensemble des solutions : $[1+\frac{\sqrt{2}}{2},2]$

b) Ne pas oublier de commencer par déterminer l'ensemble de définition de l'équation.
Ensuite distinguer les cas $x \geq 5$ et $x<5$.
Dans le cas où $x<5$ utiliser le savoir-faire : SF 4
Ensemble des solutions : $[-1,3[$

c) Ne pas oublier de commencer par déterminer l'ensemble de définition de l'équation.
Ensuite distinguer les cas $x<3$ et $x \geq 3$.
Dans le cas où $x \geq 3$ utiliser le savoir-faire : SF 4
Solutions : il n'y en a aucune.

9 Ne pas oublier de commencer par déterminer l'ensemble de définition de l'équation.
Dans chaque cas :

- Ecrire $\dfrac{x+1}{2}-\sqrt{x}$ comme un carré
- Dans l'autre membre factoriser : $(x-1)^2 = (\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2$

Ensembles des solutions : **a)** $[1,+\infty[$ **b)** $[1,+\infty[$

10 Pour montrer que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$:

- On peut écrire $\frac{1}{4}-x(1-x)$ comme un carré
- On peut aussi étudier les variations de $x \mapsto x(1-x)$.

Pour majorer $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k$, élever la majoration $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ à la puissance k puis calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{1}{4})^k$, il s'agit d'une somme géométrique.

11 Distinguer les cas $x<-m$ et $x \geq -m$.
Dans le cas où $x \geq -m$ utiliser le savoir-faire : SF 4
Pour isoler x, attention au signe de m lorsque l'on divise par m : distinguer les cas $m>0$ et $m \leq 0$.
Solutions :

- Si $m>0$: $[\frac{1-m^2}{2m},+\infty[$
- Si $m \leq 0$, il n'y a aucune solution.

12 Considérer la fonction polynomiale $P : x \mapsto (x-a)(x-b)(x-c)$ et montrer que $aP'(a)+bP'(b)+cP'(c) \geq 0$.

13 **1.** Observer que $0 \leq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

2. Appliquer l'inégalité de la question **1.** aux réels x^4 et y^2 et aux réels y^4 et x^2.

14 **1.** Réduire la différence $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2$ au même dénominateur.

2. Appliquer l'inégalité de la **1.** :
a) Aux réels a et 1, aux réels b et 1 et aux réels c et 1
b) Aux réels a et b, aux réels b et c et aux réels a et c

15 **1.** Ecrire la différence $(x+y)^2-4xy$ comme un carré.

2. La question **1.** assure que $\dfrac{xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{4}$.
Appliquer cette inégalité aux réels x et y puis aux réels x et z et enfin aux réels y et z et sommer.

16 **1.** Ecrire la différence $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}-2\dfrac{x}{z}$ comme un carré.

2. Appliquer l'inégalité de **1.** au triplet (x,y,z) puis au triplet (y,z,x) et enfin au triplet (z,x,y) et sommer.

17 **a)** Comparer les carrés des deux quantités $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ et $\sqrt{x+y}$.

b) Il suffit d'appliquer l'inégalité du a) à deux réels bien choisis.

c) Distinguer les cas $x \geq y$ et $x \leq y$.

18 **a)** Distinguer trois intervalles :

$x \in]-\infty,-\frac{1}{2}]$, $\quad x \in]-\frac{1}{2},1]\quad$ et $\quad x \in]1,+\infty[$.
Ensemble des solutions : $]-\infty,-1] \cup [-\frac{1}{3},+\infty[$.

b) Distinguer deux intervalles : $x \in]-\infty,-4]$ et $x \in]-4,+\infty[$.
Ensemble des solutions : $]-\infty,0[\cup [\frac{1}{7},+\infty[$.

c) *Ensemble des solutions :* $]-\infty,-3[\cup]-1,1[\cup]3,+\infty[$.

d) Distinguer les cas $x<1$ et $x \geq 1$.
Dans le second cas, distinguer deux intervalles : $x \in [1,3]$ et $x \in]3,+\infty[$.
Ensemble des solutions : $[2,+\infty[$.

19 Suivre le savoir faire SF 6 : montrer que

- $4n+1 \leq (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2$
- $4n+2 > (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2$

20 **a)** Suivre le savoir faire SF 6 : montrer que

- $\lfloor x\rfloor+k \leq x+k$
- $\lfloor x\rfloor+k+1 > x+k$

b)

c) On peut calculer $\lfloor x+y\rfloor$ en fonction de $N=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$.
Vérifier d'abord que $N \leq x+y < N+2$ puis en déduire la valeur de $\lfloor x+y\rfloor$ en distinguant deux cas : $x+y \in [N,N+1[$ et $x+y \in [N+1,N+2[$.

21 **1. a)** Utiliser le résultat de l'exercice 20

b) Suivre l'indication pour encadrer $2x-1$ entre deux entiers consécutifs, d'abord en partant de $n \leq x < n+\frac{1}{2}$ puis dans le deuxième cas en partant de $n+\frac{1}{2} \leq x < n+1$.

Réponse : $\lfloor 2x-1\rfloor = \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n \leq x < n+\frac{1}{2} \\ 2n & \text{si } n+\frac{1}{2} \leq x < n+1 \end{cases}$

2. Poser $n=\lfloor x\rfloor$ puis distinguer deux cas : $x \in [n,n+\frac{1}{2}[$ et $x \in [n+\frac{1}{2},n+1[$. Dans chaque cas :

- utiliser la question **1.** pour remplacer $\lfloor x-4\rfloor$ et $\lfloor 2x-1\rfloor$ en fonction de n
- Résoudre l'équation obtenue en l'inconnue $n \in \mathbb{Z}$
- Ne pas oublier de revenir à x à la fin une fois que l'on a trouvé n.

Ensemble des solutions : $[-\frac{7}{2},-\frac{5}{2}[$.

22 Même technique que l'exercice précédent :

- Poser $n=\lfloor x\rfloor$ et exprimer $\lfloor 3x\rfloor$ en fonction de n en distinguant trois cas : $x \in [n,n+\frac{1}{3}[$ et $x \in [n+\frac{1}{3},n+\frac{2}{3}[$ et $x \in [n+\frac{2}{3},n+1[$
- Résoudre l'équation obtenue en l'inconnue $n \in \mathbb{Z}$
- Ne pas oublier de revenir à x à la fin une fois que l'on a trouvé n.

Ensemble des solutions : $[\frac{2}{3},1[$.

23 *Ne pas oublier de commencer par l'ensemble de définition..*
Ensuite poser $n=\lfloor x\rfloor$ et traduire par un encadrement :

$$\left\lfloor\sqrt{x^2+x}\right\rfloor = n \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq \sqrt{x^2+x} \\ n+1 > \sqrt{x^2+x} \end{cases}$$

Montrer qu'il n'y a pas de solution négative.
Pour $x \geq 0$ suivre le savoir-faire SF 4 . En posant comme indiqué $x=n+d$ on aboutit à

$$\left\lfloor\sqrt{x^2+x}\right\rfloor = n \Leftrightarrow \begin{cases} d \in [0,1[\\ d^2+(2n+1)d-(n+1)<0 \end{cases}$$

Notant $\Delta_n=(2n+1)^2+4(n+1)$ le discriminant (strictement positif) du trinôme du second degré, on constate que la plus petite de ses racines est strictement négative et que la plus grande est dans $[0,1[$. On en déduit que les solutions sont tous les réels : $\quad x \in \left[n,n+\dfrac{\sqrt{\Delta_n}-(2n+1)}{2}\right[\quad$ où $n \in \mathbb{N}$ est arbitraire.

24 Encadrer $\sqrt{64n^2+1}$ entre deux entiers consécutifs, puis propager cet encadrement.

25 Suivre l'indication en distinguant deux cas :

- le cas où $\lfloor x\rfloor$ est pair : $\lfloor x\rfloor=2k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
Exprimer alors $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$ et $\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor$ en fonction de k.
Pour cela partir de l'encadrement : $\quad 2k \leq x < 2k+1$
puis encadrer $\frac{x}{2}$ entre deux entiers consécutifs et encadrer de même $\frac{x+1}{2}$ entre deux entiers consécutifs
A la fin on obtient $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor=2k$
- le cas où $\lfloor x\rfloor$ est impair : $\lfloor x\rfloor=2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
Exprimer alors $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$ et $\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor$ en fonction de k.
Pour cela procéder de même que dans le premier cas à partir de l'encadrement : $\quad 2k+1 \leq x < 2k+2$
A la fin on obtient $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor=2k+1$

26 On généralise la technique de l'exercice précédent : on écrit $\lfloor x\rfloor=nq+r$ et on exprime $\left\lfloor\dfrac{x+k}{n}\right\rfloor$ en fonction de q.
Partir de l'encadrement $nq+r \leq x < nq+r+1$.
Ensuite encadrer $\dfrac{x+k}{n}$ entre deux entiers consécutifs.
Pour cela distinguer les indices $k \leq n-r-1$ et les indices k tels que $k \geq n-r$.

27 On peut utiliser la technique des exercices 13 et 14 en distinguant n intervalles : $x \in [\lfloor x\rfloor,\lfloor x\rfloor+\frac{1}{n}[$, $x \in [\lfloor x\rfloor+\frac{1}{n},\lfloor x\rfloor+\frac{2}{n}[$, $\ldots$, $x \in [\lfloor x\rfloor+\frac{n-1}{n},\lfloor x\rfloor+1[$
et en calculant $\lfloor nx\rfloor$ en fonction de $\lfloor x\rfloor$ dans chacun des ces intervalles : pour $k=0,1,\ldots,n-1$, si $x \in [\lfloor x\rfloor+\frac{k}{n},\lfloor x\rfloor+\frac{k+1}{n}[$,
alors on montre que $\lfloor nx\rfloor=n\lfloor x\rfloor+k$ et $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}=\lfloor x\rfloor+\frac{k}{n}$.
Reste à conclure en encadrant $\frac{k}{n}$.

28

29 On suit la technique du savoir faire **SF 7** : on « fait passer tous les x du même côté » et on procède par étude de fonction (deux études de fonctions pour le b)). Pour le d) on peut aussi exploiter la convexité de $x \mapsto x^{n+1}$ (inégalité des tangentes).

30 On étudie le signe de la différence : $\underbrace{\frac{e^x-1}{x}-\left(x+e-2\right)}_{\varphi(x)}$.

Plusieurs possibilités :

- *Méthode 1.* On réduit au même dénominateur :
$$\varphi(x)=\frac{e^x-1-x^2-(e-2)x}{x}$$
Le signe du dénominateur est connu, il s'agit d'étudier le signe du numérateur $N : x \mapsto e^x-1-x^2-(e-2)x$.
Pour cela étudier la fonction N.
Le signe de N' ne s'obtient pas directement.
Calculer N'' pour obtenir les variations de N', ensuite observer que $N'(1)=0$ et le TVI assure l'existence d'un $\alpha \in [0,\ln 2]$ tel que $N'(\alpha)=0$.
Avec les variations de N' on en déduit le tableau de signe de N' (en fonction de α), puis les variations de N et enfin le signe de N (indépendamment de α).
- *Méthode 2.* On étudie directement
$$\varphi : x \mapsto \frac{e^x-1}{x}-\left(x+e-2\right)$$
On constate que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x)=(x-1)\dfrac{e^x-(1+x)}{x^2}$
Ainsi $\varphi'(x)$ est du signe de $x-1$ ce qui permet de tracer le tableau de variation de φ.
L'accès au signe de φ nécessite :
  - Le calcul de $\varphi(1)$.
  - l'étude de $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi$.

31 **1.** Fixer $x \in \mathbb{R}_+^*$ et étudier le signe de la fonction $f : y \mapsto x\ln x+e^{y-1}-xy$ (ou fixer $y \in \mathbb{R}$ et étudier le signe de $x \mapsto x\ln x+e^{y-1}-xy$.

2. Appliquer le résultat de **1.** :
- D'abord aux réels xy et z
- Ensuite aux réels x et $y\ln y$ et aux réels y et $x\ln x$.

32 Fixer $y \geq 0$ et étudier la fonction $\varphi : x \mapsto f(x+y)-f(x)-f(y)$.

33 Procéder par récurrence pour montrer que les fonctions $\varphi_n : x \mapsto e^x-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$ sont positives sur $\mathbb{R}_+$.
Pour l'hérédité, remarquer que $\varphi'_{n+1}=\varphi_n$.

34

35 Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[1,+\infty[$.
Il suffit de majorer $|f'|$ par $\dfrac{1}{2}$ sur $[1,+\infty[$.

36 L'une des deux est connue. Pour l'autre, pour $x \in]0,1]$ fixé, appliquer l'inégalité des accroissements finis à $f : t \mapsto e^t$ définie sur l'intervalle $[0,x]$.

37 **1.** Montrer que $\mathbb{R}_+$ (par exemple) est stable par f.

2. Résoudre l'équation $f(\alpha)=\alpha$ d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
Réponse. $\alpha=\sqrt{2}-1$.

3. Observer que f' est bornée par $\dfrac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}_+$ puis suivre le savoir faire **SF 14**.

4. Il suffit de trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-5}$.
La condition équivaut à $n \geq \dfrac{5\ln(10)}{\ln 4}$ donc $n=9$ convient.

38 **1. a)** Pour montrer le caractère $\frac{\sqrt{3}}{2}$-lipschtizien de f, utiliser l'inégalité des accroissements finis.
On obtient $f'(x)=\sin(2x)\sin(\cos^2 x)$.
Remarquer que $\cos^2 x \in [0,1] \subset [0,\frac{\pi}{3}]$.

b) Appliquer le TVI strictement monotone à la fonction $g : x \mapsto f(x)-x$ sur $[0,1]$.

2. Méthode classique, voir le savoir faire **SF 14** .

39 **1. a)** Pour montrer que $[\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$ est stable par f, fixer $x \in [\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$ et montrer que $\frac{3}{4} \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$ en encadrant sin.
Pour montrer le caractère $\frac{4}{9}$-lipschtizien de f, utiliser l'inégalité des accroissements finis.
On obtient : $f'(x)=-\dfrac{1}{4x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b) Appliquer le TVI strictement monotone à la fonction $g : x \mapsto f(x)-x$ sur $[\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$.

2. a) Montrer que $u_1 \in [\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$ puis utiliser la stabilité de $[\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$ par f (résultat du cours)

b) Adapter la méthode du savoir faire **SF 14** pour montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$:
$$|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|u_1-\alpha|$$
Noter que l'on démarre ici à $n=1$ puisque u_1 est le premier terme de la suite qui appartient à $[\frac{3}{4},\frac{5}{4}]$ (ce n'est pas forcément le cas de u_0).