Ensembles, relations binaires

SF 1 Montrer que $E = F$

On peut raisonner par double inclusion *i.e.* montrer que $E \subset F$ puis que $F \subset E$.

SF 2 Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E

On vérifie que $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive :* On fixe $x \in E$ et on montre que : $x \mathscr{R} x$
- *Symétrique.* On fixe $x, y \in E$ tels que : $x \mathscr{R} y$ et on montre que : $y \mathscr{R} x$
- *Transitive.* On fixe $x, y, z \in E$ tels que : $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$ et on montre que $x \mathscr{R} z$

SF 3 Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur E

On vérifie que $\mathscr{R}$ est :

- *Réflexive :* On fixe $x \in E$ et on montre que : $x \mathscr{R} x$
- *Antisymétrique.*
  On fixe $x, y \in E$ tels que : $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x$ et on montre que : $x = y$
- *Transitive.* On fixe $x, y, z \in E$ tels que : $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$ et on montre que $x \mathscr{R} z$

Applications

SF 4 Montrer que f est injective

- On considère deux éléments ayant même image par f, on écrit :
  « Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ »
- On montre qu'ils sont égaux.

SF 5 Montrer que f n'est pas injective

Il suffit de trouver deux éléments distincts ayant la même image par f

SF 6 Exploiter l'injectivité

Lorsque l'on sait que $f : E \to F$ est injective on peut « simplifier par f » : précisément dès que $f(x) = f(x')$ l'injectivité de f assure que $x = x'$.

SF 7 Montrer que $f : E \to F$ est surjective

- on fixe $y \in F$: « soit $y \in F$ »
- on construit $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

SF 8 Montrer que $f : E \to F$ n'est pas surjective

Il suffit de trouver un élément n'ayant pas d'antécédent par f.

SF 9 Exploiter la surjectivié

Si on sait que $f : E \to F$ est surjective pour $y \in F$, **il existe** $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

SF 10 Montrer que $f : E \to F$ est bijective

- *Méthode 1.* On trouve (connaît) $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
- *Méthode 2.* On fixe $y \in F$ et on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
- *Méthode 3.* On prouve que f est injective et surjective

SF 11 Déterminer l'image d'une partie A par une application f

- *Cas d'une fonction réelle.* Pour déterminer l'image $f(I)$ d'un intervalle I par une fonction f, on peut utiliser le tableau de variation de f.
- *Cas général.* Utiliser : $y \in f(A)$ ssi il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

SF 12 Déterminer l'image réciproque d'une partie B par une application f

- *Cas d'une fonction réelle.*
  - *Pour déterminer $f^{-1}(\{y\})$* on résout : $f(x) = y$
  - *Pour déterminer $f^{-1}([a, b])$* on résout : $a \leq f(x) \leq b$
- *Cas général.* Utiliser l'équivalence : $x \in f^{-1}(B)$ ssi $f(x) \in B$.