II Relations binaires sur un ensemble E

Définition 1

Une *relation binaire* $\mathscr{R}$ sur E est une partie de $E \times E$.

- **Interprétation.** Une relation binaire sur E est une propriété $\mathscr{R}$ qui s'applique aux couples d'éléments de E. Etant donné $(x, y) \in E \times E$, lorsque (x, y) vérifie $\mathscr{R}$, on écrit $x\mathscr{R}y$

1 Relations d'ordre

Définition 2

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si $\mathscr{R}$ est :
- *Réflexive* :
- *Antisymétrique* :
- *Transitive* :

Exemple 1 — **a)** Sur $\mathbb{R}$: **b)** Sur $\mathscr{P}(E)$:

Exercice 1 — Etant donnés $a, b \in \mathbb{N}$, on dit que b divise a s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kb$. On note alors $b \mid a$. Montrer que la relation « divise » **a)** Est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ **b)** N'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$

Définition 3

Une relation d'ordre $\lhd$ sur E est dite :
- *Totale* si deux éléments quelconques de E sont toujours comparables *i.e.* :
- *Partielle* si elle n'est pas totale *i.e.* si :

Exemple 2 — **a)** La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale. **b)** La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est partielle. **c)** La relation d'inclusion sur $\mathscr{P}(E)$ est partielle dès que E contient au moins deux éléments.

Définition 4

Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E et $A \in \mathscr{P}(E)$.
- On dit que A est *majorée* (pour $\lhd$) si :
- On appelle *plus grand élément* de A (pour $\lhd$) tout :

Exemple 3 — On travaille sur $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité $\mid$. Déterminer dans chaque cas si la partie A est majorée et si elle possède un plus grand élément : **a)** $A = \{6, 10, 15\}$ **b)** $A = \mathbb{N}$

- **Remarque.** On définit de même les notions de partie minorée, de minorant et de plus petit élément.
- **Vocabulaire.** On dit que A est *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exercice 2 — Montrer que si A possède un plus grand élément pour une relation d'ordre $\lhd$, alors il est unique.

2 Relations d'équivalence

Définition 5

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathscr{R}$ est :
- *Réflexive* • *Symétrique* : • *Transitive*

Exemple 4 — **a)** Sur E : **b)** Sur l'ensemble des droites du plan :

Exercice 3 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$

Théorème 1

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.
- Pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x (pour $\mathscr{R}$) est l'ensemble des éléments en relation avec x à savoir :
- Ces classes d'équivalence forment une *partition* de E.

Exercice 4 — Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.
1. Montrer que pour tous $x, y \in E$: $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \iff x\mathscr{R}y$.
2. Montrer que les classes d'équivalences pour $\mathscr{R}$ forment ce que l'on appelle une *partition* de E :
   • Aucune n'est vide • Leur réunion est E. • Deux classes distinctes sont disjointes.

Exercice 5 — Déterminer les classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$:
a) Pour la congruence modulo 2 **b)** Pour la congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$