I Ensembles

1 Vocabulaire lié aux ensembles

- **Notation.** Si x est un élément d'un ensemble E on note $x \in E$ et on dit : « x appartient à E » ou « E possède x » Sinon on note $x \notin E$.

Définition 1

Un ensemble E est inclus dans un ensemble F,noté $E \subset F$, si tout élément de E appartient à F *ie* :

Rédaction : pour montrer que $E \subset F$

« Soit $x \in E$, (montrons que x appartient à F)... ... donc $x \in F$ »

Exemple 1 — On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Montrer que $\mathbb{U}_8 \subset \mathbb{U}_{16}$.

Définition 2

Soient A, E deux ensembles. Lorsque $A \subset E$, on dit que :

- L'ensemble des parties de E est noté :
- $A \in \mathscr{P}(E)$ signifie :

- **Remarque.** $\mathscr{P}(E)$ possède toujours :

Exemple 2 — Lister tous les éléments de $\mathscr{P}(E)$ lorsque $E = \{1,2,3\}$.

Définition 3

- Le produit cartésien de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des :
- Plus généralement le produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, noté $E_1 \times E_2 \times \dots E_n$ est l'ensemble des n-*uplets* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour certains $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_n \in E_n$.

- **Notation.** Si $E_1 = \cdots = E_n = E$ on note E^n au lieu de $E \times E \times \cdots \times E$. Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels

Exemple 3 — Décrire $E \times F$ lorsque $E = \{a,b\}$ et $F = \{1,2,3\}$.

Attention Ne pas confondre $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $(x_1, \dots, x_n)$. Par exemple :

2 Opérations ensemblistes

Dans tout ce qui suit E est un ensemble et A, B et C sont trois sous-ensembles de E.

Définition 4

L'*intersection* de A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, des éléments de E appartenant à A et B. Pour $x \in E$

$$x \in A \cap B \iff$$

A et B sont dits disjoints lorsque $A \cap B =$

Théorème 1 : Propriétés de l'intersection

- $A \cap A =$ • $A \cap \varnothing =$ • $A \cap E =$
- *Ordre à connaître :* • $A \cap B \subset$ • $A \cap B \subset$
- *Commutativité :* $A \cap B =$
- *Associativité :* $(A \cap B) \cap C =$
- Si $A \subset B$, alors $A \cap B =$

Définition 5

La *réunion* de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, des éléments de E appartenant à A ou à B. Pour tout $x \in E$:

$$x \in A \cup B \iff$$

Théorème 2 : Propriétés de la réunion

- $A \cup A =$ • $A \cup \varnothing =$ • $A \cup E =$
- *Ordre à connaître :* • $\subset A \cup B$ • $\subset A \cup B$
- *Commutativité :* $A \cup B =$
- *Associativité :* $(A \cup B) \cup C =$
- Si $A \subset B$, alors $A \cup B =$

Définition 6

Le *complémentaire de A dans E* est l'ensemble, noté $\overline{A}$ (ou A^c), des éléments de E n'appartenant pas à A :

$x \in \overline{A} \iff$

- **Retenir.** • $\overline{\overline{A}} =$ • $\overline{\varnothing} =$ • $\overline{E} =$ • $A \cap \overline{A} =$ • $A \cup \overline{A} =$

Théorème 3 : Règles de calculs

- $(A \cup B) \cap C =$
- $(A \cap B) \cup C =$
- $\overline{A \cap B} =$
- $\overline{A \cup B} =$

Définition 7

La différence $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B : $x \in A \setminus B \Leftrightarrow$

- **Généralisation.** Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E :

  - $\bigcap_{i \in I} A_i =$
  - $\bigcup_{i \in I} A_i =$