III Action de f sur les sous-ensembles

1 Image directe, image réciproque

• **Cadre.** • $f : E \to F$ est une application.

Définition 1

Soit $A \subset E$. L'*image (directe)* de A par f est l'ensemble, noté $f(A)$, des images par f des éléments de A :

• **Retenir.** Pour tout $y \in F$: $y \in f(A)$ signifie :

SF 9 : Déterminer l'image d'une partie – cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Exemple 1 — **1.** Déterminer l'image du segment $[-1, 2]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$.
2. Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

SF 9 : Déterminer l'image d'une partie – cas général

Exemple 2 — On considère l'application $f : z \mapsto \exp z$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer $f(i\mathbb{R})$.

Exemple 3 — On considère l'application $f : z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et on note Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f(\Delta) = i\mathbb{R}_+$ (ensemble des complexes z de la forme $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}_+$)

Définition 2

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble, noté $f^{-1}(B)$ des antécédents par f des éléments de B

• **Retenir.** Pour tout $x \in E$: $x \in f^{-1}(B)$ signifie :

Attention $f^{-1}(B)$ est défini même si :

SF 10 : Déterminer l'image réciproque d'une partie – cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

• Trouver $f^{-1}(\{y\})$ revient à résoudre :

• Trouver $f^{-1}([a, b])$ revient à résoudre :

Exemple 4 — **1.** Déterminer l'image réciproque de $[1, 2]$ par la fonction exponentielle.
2. Déterminer l'image réciproque de $[4, +\infty[$ par $f : x \mapsto x^2$.
3. Soit $f : x \mapsto \sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}([2, 3])$.

SF 10 : Déterminer l'image réciproque d'une partie – cas général

Exemple 5 — On considère l'application $f : z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = i\mathbb{R}^*$.

Exercice 1 *Partition de l'ensemble de départ par une application* — Montrer que : $\boxed{E = \bigcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})}$.

2 Prolongement, restriction d'une application

Définition 3

Soient $f : E \to F$ et A une partie de E. La restriction de f à A est l'application $f_{|A} : A \to F$ définie par :

Exemple 6 — Que peut-on dire de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?

Définition 4

Soient A une partie de E et $f : A \to F$. **Un** prolongement de f à E est une application $\widetilde{f} : E \to F$ telle que :

Exemple 7 — On note f l'application $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Peut-on prolonger f à $\mathbb{R}$ en une fonction continue ?