Séries

Chapitre 30

Cadre

Dans tout le chapitre

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite complexe.

I Généralités

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général u_n* est

  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général u_n* est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général u_n* est
  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

- La *série de terme général u_n* est
  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est

  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est

  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est

  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est
  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est
  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Le n^e *reste* de la série :

  Retenir :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Le n^e *reste* de la série : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

  Retenir :

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est
  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Le n^e *reste* de la série : $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

  Retenir :

$= \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{N} u_k$

1 Vocabulaire sur les séries

Définition 1

« La série $\sum u_n$ »

- La *série de terme général* u_n est
  la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n^e *somme partielle* de la série.

  Retenir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$

Définition 2

i.e. la suite (S_n) converge

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

- La *somme* de la série : la limite finie $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Le n^e *reste* de la série : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

  Retenir : $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$

1 Vocabulaire sur les séries

☢ **Attention** ☢ **Ne pas confondre les notations**

$$\sum u_n \quad \cancel{=} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Attention ! Ne pas confondre les notations

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\boxed{\sum u_n} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

1 Vocabulaire sur les séries

Attention ! Ne pas confondre les notations

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\sum u_n \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Attention ! Ne pas confondre les notations

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\sum u_n \;\cancel{=}\; \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors :

Attention ! Ne pas confondre les notations

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\sum u_n \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge

1 Vocabulaire sur les séries

☢ **Attention ! Ne pas confondre les notations**

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\sum u_n \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente :

☢ **Attention ! Ne pas confondre les notations**

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\sum u_n \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi : $|q| < 1$.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 1 : Opérations sur les séries

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors : $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ divergente : $\sum(u_n + v_n)$ est divergente

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi : $|q| < 1$.

Dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 2 : Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Théorème 3 : Séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$. La *série géométrique* $\sum q^k$ converge ssi : $|q| < 1$.

Dans ce cas $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Exercice 1

Démontrer le théorème 3.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge ssi :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge ssi : la suite (v_n) converge.

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge ssi : la suite (v_n) converge.

Exercice 2

Démontrer le théorème.

Théorème 4 : Séries télescopiques

La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge ssi : la suite (v_n) converge.

Exemple 1 : Etudier la nature

a) $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ d) $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.
La *série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

-
-

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.
La *série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $|R_n| \leq a_{n+1}$
-

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.
La *série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $|R_n| \leq a_{n+1}$
- R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.
La *série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $|R_n| \leq a_{n+1}$
- R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$

2 Premiers exemples classiques

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

Théorème 5 : Séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, décroissante de limite nulle.
La *série alternée* $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $|R_n| \leq a_{n+1}$
- R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$

Exercice 3 : Figure

Etablir ce résultat en montrant que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors :

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4

Démontrer ce théorème.

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

☢ Attention ☢

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'assure **jamais** que la série $\sum u_n$ converge.

Par exemple :

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

☢ **Attention** ☢

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'assure **jamais** que la série $\sum u_n$ converge.

Par exemple : $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ DV alors que : $\displaystyle\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2 Premiers exemples classiques

Théorème 6

Si la série $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

☢ Attention ☢

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ n'assure **jamais** que la série $\sum u_n$ converge.

Par exemple : $\sum \frac{1}{n}$ DV alors que : $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Divergence grossière

Exemple 2 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = \dfrac{n}{3n+2}$ b) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ c) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \frac{1}{n}$

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \dfrac{1}{n}$

Théorème 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La *série de Riemann* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$

3 Comparaison série-intégrale

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \frac{1}{n}$

Théorème 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La *série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3 Comparaison série-intégrale

Exemple 3

a) Montrer que $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge

b) On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Montrer que : $R_n \sim \dfrac{1}{n}$

Théorème 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La *série de Riemann* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 5

Démontrer le théorème à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

II Séries à termes positifs

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

Théorème 1

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
La série $\sum u_n$ converge ssi :

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

Théorème 1

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
La série $\sum u_n$ converge ssi : elle est majorée

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

ie si les sommes partielles sont majorées

Théorème 1

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
La série $\sum u_n$ converge ssi : elle est majorée

1 Sommes partielles d'une série à termes positifs

ie si les sommes partielles sont majorées

Théorème 1

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
La série $\sum u_n$ converge ssi : elle est majorée

Exercice 1

Démontrer le théorème.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 2

Démontrer le théorème dans le cas où $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 1 : Etudier la nature de la série

a) $\displaystyle\sum \frac{\text{th}\, n}{n^2+1}$

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 2 : Comparaison par des inégalités

On suppose qu'*à partir d'un certain rang*, $0 \leq u_n \leq v_n$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 1 : Etudier la nature de la série

a) $\displaystyle \sum \frac{\operatorname{th} n}{n^2+1}$ b) $\displaystyle \sum \frac{e^{\cos n}}{n}$

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors :

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exercice 3 : Ex. 7.1, banque INP

Démontrer le théorème dans le cas où $u_n \geq 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Critères de convergence par comparaison

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exemple 2 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exemple 2 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

b) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n - \sqrt{n}}\right)$

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exemple 2 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$

b) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n - \sqrt{n}}\right)$

c) $u_n = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

l'une CV ssi l'autre CV

Théorème 3 : Comparaison par des équivalents

On suppose qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.
Si $u_n \sim v_n$ alors : les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Exemple 3 : Montrer que la suite (u_n) converge

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \ln n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie :
- **Exemples.**

  a) $2n = O(\quad)$ b) $\sin(n^2) = O(\quad)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\Big(\quad\Big)$
- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} =$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(\quad)$ b) $\sin(n^2) = O(\quad)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\Big(\quad\Big)$
- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} =$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(\ \ )$ b) $\sin(n^2) = O(\ \ )$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\Big(\ \ \Big)$
- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} =$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(\quad)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\Big(\quad\Big)$
- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} =$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\Big(\quad\Big)$

- **Dans un DL.**

a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} =$

b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$
- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} =$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$
- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$
- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} \underbrace{- \dfrac{1}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$
- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} \underbrace{- \dfrac{1}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

- **Dans un DL.**

a) $$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} \underbrace{- \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

b) $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

- **Dans un DL.**

  a) $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} \underbrace{- \dfrac{1}{8n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

  b) $\ln(1+\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \underbrace{+ \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^3}\right)}$

2 Critères de convergence par comparaison

Rappel sur les « grands O »

- **Rappel.** $u_n = O(v_n)$ signifie : la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- **Exemples.**

  a) $2n = O(n)$ b) $\sin(n^2) = O(1)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

- **Dans un DL.**

$$\text{a) } \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} \underbrace{- \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{b) } \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \underbrace{+ \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) ii) iii)

Alors :

2 Critères de convergence par comparaison

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) iii)

Alors :

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii)

Alors :

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii)

Alors :

2 Critères de convergence par comparaison

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors :

2 Critères de convergence par comparaison

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

Exercice 4

Démontrer le théorème.

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 4 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 4 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^3 - n}$

2 Critères de convergence par comparaison

vrai aussi si
APCR, $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$

ou $u_n = o(v_n)$

Théorème 4 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 4 : Etudier la nature de $\sum u_n$

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^3 - n}$

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ e^{\cos n} + \sin^2(n)}{n^{5/2} - n}$

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $\quad n^{\alpha} u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

i) $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ii) $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ iii) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

i) $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ii) $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ iii) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 5 : Etudier la nature de $\sum u_n$:

a) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^4}$

i) $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ii) $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ iii) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 5 : Etudier la nature de $\sum u_n$:

a) $u_n = \frac{\ln n}{n^4}$ b) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

2 Critères de convergence par comparaison

i) $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ii) $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ iii) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 5 : Etudier la nature de $\sum u_n$:

a) $u_n = \frac{\ln n}{n^4}$ b) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$ c) $u_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

i) $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ii) $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ iii) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV

SF 4 : comparaison avec une série de Riemann

Lorsque l'on étudie la nature d'une série $\sum u_n$, si on trouve $\alpha > 1$ tel que : $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Exemple 5 : Etudier la nature de $\sum u_n$:

a) $u_n = \frac{\ln n}{n^4}$ b) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$ c) $u_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ d) $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$

III Nature d'une série dans le cas général

1 Convergence absolue

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors :

1 Convergence absolue

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

1 Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ *converge absolument*

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

1 Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ *converge absolument*

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 1 : ☢ **Attention** ☢

Donner un exemple de série convergente mais non absolument convergente.

On dit que $\sum u_n$ *converge absolument*

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

Exercice 1

Démontrer le théorème.

1 Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ *converge absolument*

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge alors : $\sum u_n$ converge.

Exemple 2

Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^{5/4}+1}$ converge.

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) ii) iii)

Alors :

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) iii)

Alors :

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii)

Alors :

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii)

Alors :

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors :

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

Une seule des deux suites est positive : v_n

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

1 Convergence absolue

Une seule des deux suites est positive : v_n

« jamais de $(-1)^n$ dans le O »

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

Une seule des deux suites est positive : v_n

« jamais de $(-1)^n$ dans le O »

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

☢ Attention ☢

Le critère d'équivalence n'est plus valable pour les séries à terme général de signe non constant

Une seule des deux suites est positive : v_n

« jamais de $(-1)^n$ dans le O »

Théorème 2 : Comparaison par des grands O/petits o

Soient $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si :

i) APCR, $v_n \geq 0$ ii) $u_n = O(v_n)$ iii) $\sum v_n$ CV

Alors : $\sum u_n$ converge absolument (donc converge tout court)

Exemple 3 : Ex. 7.2, banque INP

Etudier la nature de : $$\sum \frac{((-1)^n + i)\sin(\frac{1}{n})\ln n}{\sqrt{n+3}-1}$$

Rappel : séries de références

- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi :

2 Bilan des techniques

Rappel : séries de références

- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi : $\alpha > 1$.

2 Bilan des techniques

Rappel : séries de références

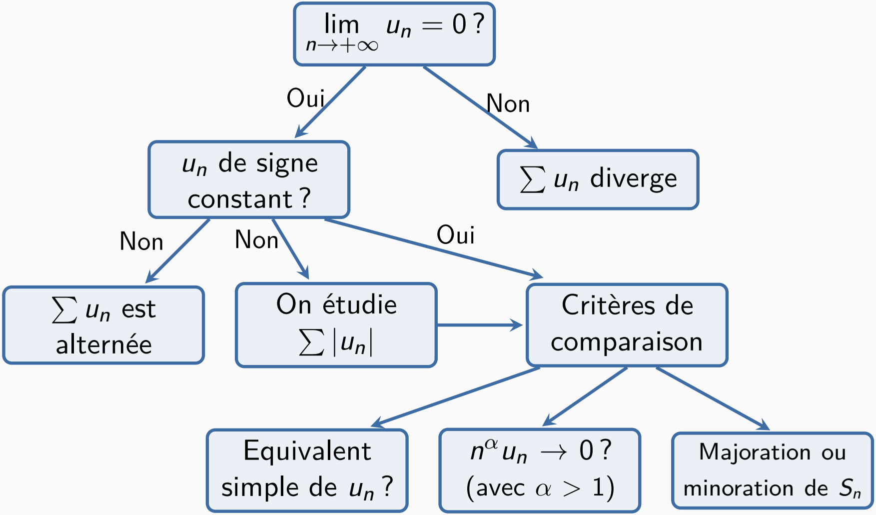
- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi : $\alpha > 1.$
- La série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi :

2 Bilan des techniques

Rappel : séries de références

- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi : $\alpha > 1$.
- La série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ssi : $\alpha > 0$.

2 Bilan des techniques



Critères de comparaison

$n^{\alpha} u_n \to 0$?
(avec $\alpha > 1$)

Majoratio
minoration

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 4 : Etudier la convergence absolue puis la convergence de $\sum u_n$

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}\cos n}$

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 4 : Etudier la convergence absolue puis la convergence de $\sum u_n$

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}\cos n}$ b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 5 : $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

1. Prouver que : $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum u_n$ est convergente.

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Exemple 6

Soit $\alpha > 1$. Etablir :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta(\alpha)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha)$

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Pour tout $\alpha > 1$:

$$\zeta(\alpha) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} =$$

Exemple 6

Soit $\alpha > 1$. Etablir :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta(\alpha)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha)$

SF 6 : Utiliser les DL pour étudier la nature de $\sum u_n$

On découpe u_n en morceaux plus simples puis on applique les critères de comparaison à chacun des morceaux

Pour tout $\alpha > 1$:

$$\zeta(\alpha) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Exemple 6

Soit $\alpha > 1$. Etablir :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta(\alpha)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha)$