Formes linéaires et hyperplans

Complément

Chapitre 29.1

Cadre

Dans tout le complément

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

- Une forme linéaire de E est

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
- $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $\boxed{\dim\Big(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})\Big) = \quad}$

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
- $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $\boxed{\dim\left(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})\right) = \dim E}$

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
- $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $\boxed{\dim\Big(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})\Big) = \dim E}$
- On appelle hyperplan de E tout :

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
- $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $\boxed{\dim\Big(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})\Big) = \dim E}$
- On appelle hyperplan de E tout : *noyau d'une forme linéaire non nulle de* E

Exemple 1 : Montrer que H est un hyperplan

1. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
- $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $\boxed{\dim\left(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})\right) = \dim E}$
- On appelle hyperplan de E tout : *noyau d'une forme linéaire non nulle de E*

Exemple 1 : Montrer que H est un hyperplan

1. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$
2. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) + 2P'(1) = 0\}$

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
- $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $\boxed{\dim\Big(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})\Big) = \dim E}$
- On appelle hyperplan de E tout : *noyau d'une forme linéaire non nulle de E*

Exemple 1 : Montrer que H est un hyperplan

1. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$
2. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) + 2P'(1) = 0\}$
3. $H = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0)\}$

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
- $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $\boxed{\dim\Big(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})\Big) = \dim E}$
- On appelle hyperplan de E tout : *noyau d'une forme linéaire non nulle de E*

Exemple 2 : Formes linéaires coordonnées dans $\mathbb{R}_n[X]$

1. Donner l'expression des formes linéaires coordonnées pour la base $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ des polynômes de Lagrange associés à $x_0 < \ldots < x_n$

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires

élément de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$

- Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$
- $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $\boxed{\dim\left(\mathscr{L}(E, \mathbb{K})\right) = \dim E}$
- On appelle hyperplan de E tout : *noyau d'une forme linéaire non nulle de* E

Exemple 2 : Formes linéaires coordonnées dans $\mathbb{R}_n[X]$

1. Donner l'expression des formes linéaires coordonnées pour la base $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ des polynômes de Lagrange associés à $x_0 < \ldots < x_n$
2. Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les formes coordonnées sont les $\varphi_k : P \mapsto \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in [\![0\,, n]\!]$.

Rappels sur les formes linéaires coordonnées

On suppose E de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$

- La j^{e} *forme linéaire coordonnée* de E est

Rappels sur les formes linéaires coordonnées

On suppose E de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$

- La j^e *forme linéaire coordonnée* de E est $\varphi_j : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires coordonnées

On suppose E de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$

- La j^e *forme linéaire coordonnée* de E est $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$
- La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires coordonnées

On suppose E de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$

- La j^e *forme linéaire coordonnée* de E est φ_j :
$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$$
- La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que :

1 Généralités

Rappels sur les formes linéaires coordonnées

On suppose E de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$

- La j^e *forme linéaire coordonnée* de E est $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$
- La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $H = \left\{x \in E \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\right\}$

E de dimension finie	
Base	$(b_1, \ldots, b_n)$
Vecteur	
Forme lin.	
Hyperplan	

...données

...'une base $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$

...est φ_j : $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

- La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $H = \left\{x \in E \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\right\}$

$(x_1, \ldots, x_n)$
coordonnées de x dans $\mathscr{B}$

E de dimension finie	
Base	$(b_1, \ldots, b_n)$
Vecteur	$x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$
Forme lin.	
Hyperplan	

données

'une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$

est φ_j : $\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

- La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $H = \left\{x \in E \;\middle|\; a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\right\}$

$(x_1, \ldots, x_n)$
coordonnées de x dans $\mathscr{B}$

1 Généralités

E de dimension finie	
Base	$(b_1, \ldots, b_n)$
Vecteur	$x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$
Forme lin.	$x \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$
Hyperplan	

données

'une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$

est φ_j : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

- La famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $H = \left\{ x \in E \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$

$(x_1, \ldots, x_n)$
coordonnées de x dans $\mathscr{B}$

1 Généralités

E de dimension finie	
Base	$(b_1, \dots, b_n)$
Vecteur	$x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$
Forme lin.	$x \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$
Hyperplan	$\{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$

données

'une base $\mathscr{B} = (b_1, ..., b_n)$

est $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

- La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $H = \left\{x \in E \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\right\}$

$(x_1, \dots, x_n)$
coordonnées de x dans $\mathscr{B}$

E de dimension finie	
Base	$(b_1, \dots, b_n)$
Vecteur	$x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$
Forme lin.	$x \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$
Hyperplan	$\{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$

données

'une base $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_n)$

est $\varphi_j : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

- La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $H = \left\{ x \in E \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\}$

$(x_1, \dots, x_n)$
coordonnées de x dans $\mathscr{B}$

Exercice 1

Démontrer les deux derniers points.

E de dimension finie

Base	$(b_1, \dots, b_n)$
Vecteur	$x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$
Forme lin.	$x \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$
Hyperplan	$\{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$

données

'une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$

est $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

- La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $H = \left\{x \in E \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\right\}$

$(x_1, \dots, x_n)$
coordonnées de x dans $\mathscr{B}$

Exemple 3 : $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = P(0)\}$

Trouver une équation (sur les coordonnées de P) de l'hyperplan H

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

ii) H est supplémentaire d'une droite : $E = H \oplus D$ où $D = \mathrm{Vect}(e)$ pour un certain $e \in E \setminus \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

ii) H est supplémentaire d'une droite : $E = H \oplus D$ où $D = \mathrm{Vect}(e)$ pour un certain $e \in E \setminus \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

iii) H est de dimension $n - 1$.

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

ii) H est supplémentaire d'une droite : $E = H \oplus D$ où $D = \mathrm{Vect}(e)$ pour un certain $e \in E \setminus \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

iii) H est de dimension $n - 1$.

Remarque

- En dim 3 : hyperplan =
- En dim 2 : hyperplan =

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

ii) H est supplémentaire d'une droite : $E = H \oplus D$ où $D = \mathrm{Vect}(e)$ pour un certain $e \in E \setminus \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

iii) H est de dimension $n-1$.

Remarque

- En dim 3 : hyperplan = plan
- En dim 2 : hyperplan =

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

ii) H est supplémentaire d'une droite : $E = H \oplus D$ où $D = \mathrm{Vect}(e)$ pour un certain $e \in E \setminus \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

iii) H est de dimension $n - 1$.

Remarque

- En dim 3 : hyperplan = plan
- En dim 2 : hyperplan = droite

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

ii) H est supplémentaire d'une droite : $E = H \oplus D$ où $D = \mathrm{Vect}(e)$ pour un certain $e \in E \setminus \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

iii) H est de dimension $n-1$.

Remarque

- En dim 3 : hyperplan = plan
- En dim 2 : hyperplan = droite

Exemple 4 : Déterminer la dimension de H.

$$H = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0\right\}$$

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 1

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

ii) H est supplémentaire d'une droite : $E = H \oplus D$ où $D = \mathrm{Vect}(e)$ pour un certain $e \in E \setminus \{0_E\}$.

Si E est de dimension finie n elles sont équivalentes à :

iii) H est de dimension $n-1$.

Remarque

- En dim 3 : hyperplan = plan
- En dim 2 : hyperplan = droite

Exercice 2

Démontrer l'équivalence $i) \Leftrightarrow ii)$ en dimension quelconque.

Théorème 2 : « Unicité » de l'équation d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E telles que $H = \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$.
Dans ce cas φ et ψ sont proportionnelles :

Théorème 2 : « Unicité » de l'équation d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E telles que $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$.
Dans ce cas φ et ψ sont proportionnelles : il existe $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\psi = k\varphi$.

Théorème 2 : « Unicité » de l'équation d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E telles que $H = \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$.
Dans ce cas φ et ψ sont proportionnelles : il existe $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\psi = k\varphi$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

Théorème 2 : « Unicité » de l'équation d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E telles que $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$.
Dans ce cas φ et ψ sont proportionnelles : il existe $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\psi = k\varphi$.

Exemple 5 : E est un $\mathbb{K}$-e. v. de dimension finie supérieure à 2

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts.
Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,,n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est :

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,, n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n - p$.

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in \llbracket 1\,,n \rrbracket$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n-p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n-p$ est :

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,, n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n-p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n-p$ est : l'intersection de p hyperplans de E.

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

p hyperplans $= p$ équations

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,, n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n - p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n - p$ est : l'intersection de p hyperplans de E.

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

$$p \text{ hyperplans} = p \text{ équations}$$
$$= p \text{ contraintes}$$

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,, n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n - p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n - p$ est : l'intersection de p hyperplans de E.

p hyperplans $= p$ équations
$= p$ contraintes
$=$ au moins $n - p$ degrés de liberté

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,,n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n - p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n - p$ est : l'intersection de p hyperplans de E.

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

$$\begin{aligned} p \text{ hyperplans} &= p \text{ équations} \\ &= p \text{ contraintes} \\ &= \text{au moins } n-p \text{ degrés de liberté} \end{aligned}$$

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,,n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n-p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n-p$ est : l'intersection de p hyperplans de E.

Exercice 4

Démontrer les deux points du théorème.

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

p hyperplans $= p$ équations
$= p$ contraintes
$=$ au moins $n - p$ degrés de liberté

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,,n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n - p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n - p$ est : l'intersection de p hyperplans de E.

Remarque

Plus généralement :

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \varphi_p) = n - p \iff$$

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

p hyperplans $= p$ équations
$= p$ contraintes
$=$ au moins $n - p$ degrés de liberté

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,,n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n - p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n - p$ est : l'intersection de p hyperplans de E.

Remarque

Plus généralement :

$$\dim(\operatorname{Ker} \varphi_1 \cap \cdots \cap \varphi_p) = n - p \iff (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \text{ est libre}$$

2 Hyperplans : trois définitions équivalentes

p hyperplans $= p$ équations
$= p$ contraintes
$=$ au moins $n-p$ degrés de liberté

Théorème 3

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $p \in [\![1\,,n]\!]$.

1. L'intersection de p hyperplans de E est : un s.e.v. de E de dimension $\geq n-p$.
2. Tout sous-espace de dimension $n-p$ est : l'intersection de p hyperplans de E.

« Equations indépendantes »

Remarque

Plus généralement :

$$\dim(\operatorname{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \varphi_p) = n-p \iff (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \text{ est libre}$$