Matrices – Niveau 3

Chapitre 29

I Théorie du rang

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Notation

- Vecteurs colonnes de A : $C_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n \quad 1 \leq j \leq p$
- Vecteurs lignes de A : $L_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip}) \in \mathbb{K}^p \quad 1 \leq i \leq n$

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Notation

- Vecteurs colonnes de A : $\quad C_j = (a_{1j}\,, \ldots\,, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n \quad 1 \leq j \leq p$
- Vecteurs lignes de A : $\quad L_i = (a_{i1}\,, \ldots\,, a_{ip}) \in \mathbb{K}^p \quad 1 \leq i \leq n$

Exercice 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer une base de $\operatorname{Im} A$ et une base de $\operatorname{Ker} A$.

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Notation

- Vecteurs colonnes de A : $\quad C_j = (a_{1j}\,,\,\ldots\,,\,a_{nj}) \in \mathbb{K}^n \quad 1 \leq j \leq p$
- Vecteurs lignes de A : $\quad L_i = (a_{i1}\,,\,\ldots\,,\,a_{ip}) \in \mathbb{K}^p \qquad 1 \leq i \leq n$

Exercice 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer une base de $\operatorname{Im} A$ et une base de $\operatorname{Ker} A$.

En pratique

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1\,,\,\ldots\,,\,C_p)$
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $\quad AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En pratique

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1\ , \ \dots\ , \ C_p)$
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $AX = 0$

Théorème 1 : Critère $AX = 0$

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A est inversible ssi :

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En pratique

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1 \ , \ \dots \ , \ C_p)$
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $AX = 0$

Théorème 1 : Critère $AX = 0$

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A est inversible ssi : $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En pratique

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1 \,,\, \dots \,,\, C_p)$
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $AX = 0$

i.e. ssi pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

$AX = 0 \implies X = 0$

Théorème 1 : Critère $AX = 0$

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A est inversible ssi : $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En pratique

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1 \;,\; \dots \;,\; C_p)$
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $AX = 0$

Théorème 1 : Critère

i.e. ssi pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

$$AX = 0 \implies X = 0$$

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A est inversible ssi : $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

Conséquence

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est :

En pratique

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1 \ , \ \dots \ , \ C_p)$
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $AX = 0$

i.e. ssi pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$
$AX = 0 \implies X = 0$

Théorème 1 : Critère

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A est inversible ssi : $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

Conséquence

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est : libre

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En pratique

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1 \ , \ \dots \ , \ C_p)$
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $AX = 0$

Théorème 1 : Critère $AX = 0$

i.e. ssi pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

$AX = 0 \implies X = 0$

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A est inversible ssi : $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

Conséquence

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est : libre

Exercice 2

Démontrer le théorème.

1 Image et noyau d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

En pratique

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$

- $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1 \,,\, \dots \,,\, C_p)$
- $\operatorname{Ker} A$ est l'ensemble des solutions du système : $AX = 0$

Théorème 1 : Critère

i.e. ssi pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(K)$ $AX = 0 \implies X = 0$

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors A est inversible ssi : $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

Exercice 3 : Matrice à diagonale strictement dominante

On suppose que pour tout $i \in [\![1\,,\, n]\!]$: $$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de :

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de : la famille de ses colonnes.

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de : la famille de ses colonnes.

Remarque

Autrement dit : $\operatorname{rg}(A) =$

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de : la famille de ses colonnes.

Remarque

Autrement dit : $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_p)$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de : la famille de ses colonnes.

$= \dim \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_p)$

Remarque

Autrement dit : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_p)$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de : la famille de ses colonnes.

$= \dim \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_p)$

Remarque

Autrement dit : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_p) = \dim \mathrm{Im}\, A = \mathrm{rg}(f_A)$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de : la famille de ses colonnes.

$= \dim \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_p)$

Remarque

Autrement dit : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \ldots, C_p) = \dim \mathrm{Im}\, A = \mathrm{rg}(f_A)$

Exercice 4 : Montrer :

a) $\boxed{\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)}$

b) $\forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\boxed{\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))}$

c) $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A)$

d) $\forall Q \in GL_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AQ) = \mathrm{rg}(A)$

Définition 1

On appelle *rang de A* le rang dans $\mathbb{K}^n$ de : la famille de ses colonnes.

$= \dim \text{Vect}(C_1, ..., C_p)$

Remarque

Autrement dit : $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \ldots, C_p) = \dim \text{Im}\, A = \text{rg}(f_A)$

Exercice 4 : Montrer :

a) $\boxed{\text{rg}(A) \leq \min(n, p)}$

b) $\forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \boxed{\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))}$

c) $\forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$

d) $\forall Q \in GL_p(\mathbb{K}),\ \text{rg}(AQ) = \text{rg}(A)$

On ne modifie pas
le rang en multipliant
par une matrice inversible

Théorème 2 : Inversibilité et rang

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi :

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 2 : Inversibilité et rang

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi : $\mathrm{rg} A = n$.

Théorème 2 : Inversibilité et rang

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi : $\text{rg}A = n$.

Conséquence

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \dots, C_n)$ est :

Théorème 2 : Inversibilité et rang

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi : $\mathrm{rg} A = n$.

Conséquence

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \ldots, C_n)$ est : génératrice

Théorème 2 : Inversibilité et rang

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi : $\text{rg}A = n$.

Conséquence

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $(C_1, \ldots, C_n)$ est : génératrice

Exercice 5

Démontrer le théorème.

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) =$

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\big)$

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$

Théorème 4 : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases et $f \in \mathscr{L}(E, F)$: $\quad \mathrm{rg}(f) =$

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\big)$

Théorème 4 : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases et $f \in \mathscr{L}(E, F)$: $\quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\big)$

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$

Théorème 4 : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases et $f \in \mathscr{L}(E, F)$: $\quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$

Exercice 0 : Bonus

Démontrer les deux théorèmes

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)$

Théorème 4 : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases et $f \in \mathscr{L}(E, F)$: $\quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)$

Théorème 5 : Rang de la transposée (Admis provisoirement)

▪

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$

Théorème 4 : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases et $f \in \mathscr{L}(E, F)$: $\quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$

Théorème 5 : Rang de la transposée (Admis provisoirement)

- $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$

Théorème 4 : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases et $f \in \mathscr{L}(E, F)$: $\quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$

Théorème 5 : Rang de la transposée (Admis provisoirement)

- $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$
- Le rang de A est aussi le rang de :

2 Rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 3 : Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit $(E, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$: $\quad \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$

Théorème 4 : Lien avec le rang d'une application linéaire

Soit $(E, \mathscr{B})$ et $(F, \mathscr{C})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie munis de bases et $f \in \mathscr{L}(E, F)$: $\quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$

Théorème 5 : Rang de la transposée (Admis provisoirement)

- $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$
- Le rang de A est aussi le rang de : la famille de ses vecteurs lignes

3 Rang et matrices extraites de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2

Une matrice *extraite de A* est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.

Définition 2

Une matrice *extraite de A* est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.

de la forme : $\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_m,j_1} & \dots & a_{i_m,j_q} \end{pmatrix}$

pour certains : $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$

et : $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq p$

3 Rang et matrices extraites de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2

Une matrice *extraite de A* est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.

de la forme : $\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_m,j_1} & \dots & a_{i_m,j_q} \end{pmatrix}$

pour certains : $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$

et : $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq p$

Théorème 6

Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A. Autrement dit, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\text{rg}(A) \geq r$ ssi

3 Rang et matrices extraites de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2

Une matrice *extraite de A* est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.

de la forme : $\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_m,j_1} & \dots & a_{i_m,j_q} \end{pmatrix}$

pour certains : $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$

et : $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq p$

Théorème 6

Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A. Autrement dit, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rg}(A) \geq r$ ssi A possède une matrice extraite inversible de taille r.

3 Rang et matrices extraites de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2

Une matrice *extraite de A* est une matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.

de la forme : $\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \dots & a_{i_1,j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_m,j_1} & \dots & a_{i_m,j_q} \end{pmatrix}$

pour certains : $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$

et : $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq p$

Théorème 6

Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A. Autrement dit, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\text{rg}(A) \geq r$ ssi A possède une matrice extraite inversible de taille r.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 5 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Montrer sans aucun calcul que $\text{rg}(A) \geq 3$.

4 Méthode de Gauss pour le calcul du rang

Remarque

Les opérations élémentaires conservent le rang

4 Méthode de Gauss pour le calcul du rang

car effectuer une opé. élem.
=
multiplier par une matrice inversible

Remarque

Les opérations élémentaires conservent le rang

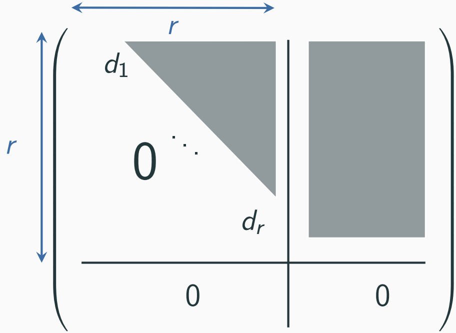
car effectuer une opé. élem.
=
multiplier par une matrice inversible

Remarque

Les opérations élémentaires conservent le rang

Vocabulaire

Une matrice est échelonnée si elle a la forme :



4 Méthode de Gauss pour le calcul du rang

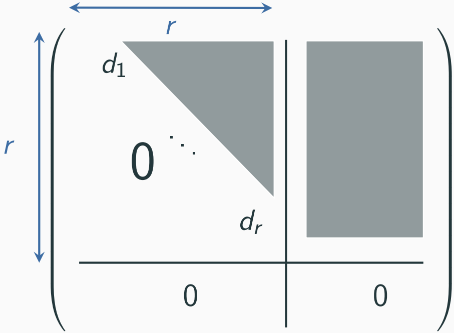
car effectuer une opé. élem.
=
multiplier par une matrice inversible

Remarque

Les opérations élémentaires conservent le rang

Vocabulaire

Une matrice est échelonnée si elle a la forme :



Exercice 6

Montrer que cette matrice est de rang r

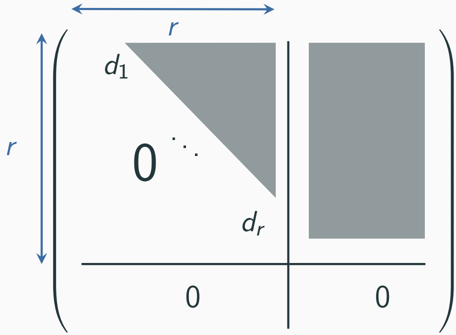
4 Méthode de Gauss pour le calcul du rang

Remarque

Les opérations élémentaires conservent le rang

SF 9 : Calculer le rang

On transforme A en une matrice échelonnée par opérations élémentaires



4 Méthode de Gauss pour le calcul du rang

Remarque

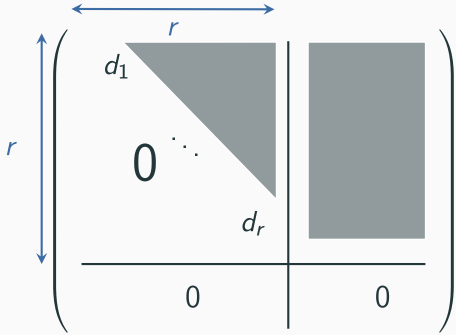
Les opérations élémentaires conservent le rang

SF 9 : Calculer le rang

On transforme A en une matrice échelonnée par opérations élémentaires

Exemple 2 : Rang de

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 10 & 7 & 3 \end{pmatrix}$



4 Méthode de Gauss pour le calcul du rang

Remarque

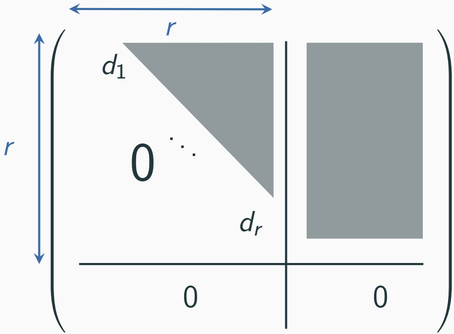
Les opérations élémentaires conservent le rang

SF 9 : Calculer le rang

On transforme A en une matrice échelonnée par opérations élémentaires

Exemple 2 : Rang de

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$



II Matrices équivalentes, matrices semblables

Cadre

- $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1

On dit que B est semblable à A si :

1 Matrices semblables et trace

Cadre

- $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1

On dit que B est semblable à A si : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

C'est le cas si A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes

Cadre

- $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1

On dit que B est semblable à A si : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

1 Matrices semblables et trace

C'est le cas si A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes

Cadre

- $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1

On dit que B est semblable à A si : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Exercice 1 : La similitude est une relation d'équivalence

On note $A \sim B$ pour « B est semblable à A ». Montrer que la relation « $\sim$ » est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2

On appelle *trace* de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2

On appelle *trace* de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1 Matrices semblables et trace

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2

On appelle *trace* de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{tr}(A) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Théorème 1

1. *Linéarité :*
2. *Symétrie :*

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2

On appelle *trace* de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Théorème 1

1. *Linéarité :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B).$
2. *Symétrie :*

Définition 2 $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

On appelle *trace* de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Théorème 1

1. *Linéarité :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B).$
2. *Symétrie :* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$

1 Matrices semblables et trace

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2

On appelle *trace* de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Théorème 1

1. *Linéarité :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B).$
2. *Symétrie :* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$

Exercice 2

Démontrer que : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2

On appelle *trace* de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Théorème 1

1. *Linéarité :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B).$
2. *Symétrie :* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$

Exemple 1

Trouver toutes les matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$.

1 Matrices semblables et trace

Théorème 2

Si A et B sont semblables alors :

Théorème 2

Si A et B sont semblables alors : $\quad \mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B.$

1 Matrices semblables et trace

Théorème 2

Si A et B sont semblables alors : $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

Exercice 3

a) Démontrer ce résultat.

b) Montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.

SF 10 : Montrer que A et B sont semblables

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et on cherche une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = B$

SF 10 : Montrer que A et B sont semblables

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et on cherche une base $\mathscr{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = B$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer que B est semblable à A.

b) Montrer que C est semblable à A.

SF 10 : Montrer que A et B sont semblables

On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A et on cherche une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = B$

Exemple 3 : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r

Montrer que A est semblable à une matrice : $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$

où : $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$

Trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

C'est la trace de la matrice de f

1 Matrices semblables et trace

Trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

C'est la trace de la matrice de f dans *n'importe quelle* base de E.

les matrices qui représentent f
ont toutes la même trace

Trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

C'est la trace de la matrice de f dans *n'importe quelle* base de E.

1 Matrices semblables et trace

les matrices qui représentent f ont toutes la même trace

Trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

C'est la trace de la matrice de f dans *n'importe quelle* base de E.

Théorème 3 : Trace d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors :

les matrices qui représentent f ont toutes la même trace

Trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

C'est la trace de la matrice de f dans *n'importe quelle* base de E.

Théorème 3 : Trace d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors : $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

les matrices qui représentent f ont toutes la même trace

Trace d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

C'est la trace de la matrice de f dans *n'importe quelle* base de E.

Théorème 3 : Trace d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors : $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

Exercice 4

Démontrer ce théorème en considérant la matrice de p dans une base bien choisie.

Définition 3

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si :

Définition 3

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si : il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = UAV$.

2 Matrices équivalentes et rang

Définition 3

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si : il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = UAV$.

Interprétations

Définition 3

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si : il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = UAV$.

Interprétations

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ sont équivalentes

2 Matrices équivalentes et rang

Définition 3

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si : il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = UAV$.

Interprétations

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ sont équivalentes
- A et B sont équivalentes si on peut transformer A en B par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes

2 Matrices équivalentes et rang

Définition 3

Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si : il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = UAV$.

Interprétations

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ sont équivalentes
- A et B sont équivalentes si on peut transformer A en B par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes

Remarque

L'équivalence des matrices est une relation d'équivalence.

2 Matrices équivalentes et rang

Exercice 5

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p non nulle
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$non nulle
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang r.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad$ où : $\quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

2 Matrices équivalentes et rang

Exercice 5

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p non nulle
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$non nulle
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang r.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad$ où : $\quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 4

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors :

2 Matrices équivalentes et rang

Exercice 5

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p non nulle
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$non nulle
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang r.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad$ où : $\quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 4

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors : A est équivalente à J_r

2 Matrices équivalentes et rang

Exercice 5

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p non nulle
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$non nulle
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang r.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad$ où : $\quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 4

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors : A est équivalente à J_r
- $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi :

2 Matrices équivalentes et rang

Exercice 5

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p non nulle
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$non nulle
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang r.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad$ où : $\quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 4

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors : A est équivalente à J_r
- $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi : $\quad \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$.

2 Matrices équivalentes et rang

Exercice 5

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p non nulle
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$non nulle
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang r.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad$ où : $\quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 4

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors : A est équivalente à J_r
- $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi : $\quad \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$.

Exercice 6

1. Démontrer le théorème.

2 Matrices équivalentes et rang

Exercice 5

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p non nulle
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$non nulle
- $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est de rang r.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F telles que : $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = J_r \quad$ où : $\quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Théorème 4

- Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors : A est équivalente à J_r
- $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi : $\quad \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$.

Exercice 6

2. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$