Approximations

Chapitre 28

I Sommes de Riemann

1 Définition et convergence des sommes des Riemann

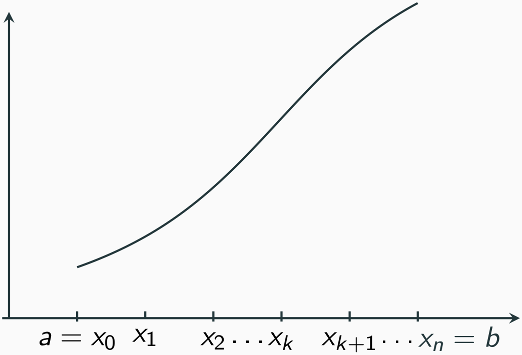
$f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b]\,,\mathbb{K})$

Définition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle sommes de Riemann de f :

$R_n(f) =$

$S_n(f) =$



1 Définition et convergence des sommes des Riemann

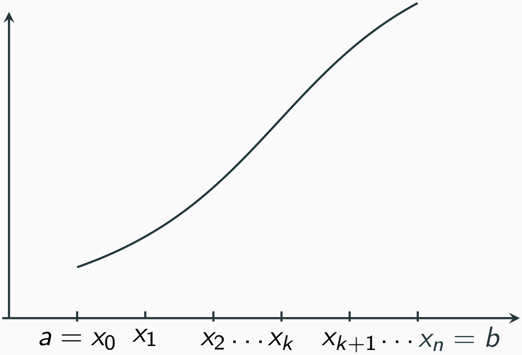
$f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b]\,,\mathbb{K})$

Définition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle sommes de Riemann de f :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$S_n(f) =$$



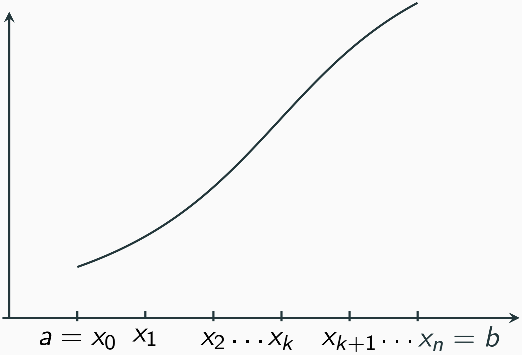
1 Définition et convergence des sommes des Riemann

$f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b]\,,\mathbb{K})$

Définition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle sommes de Riemann de f :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$



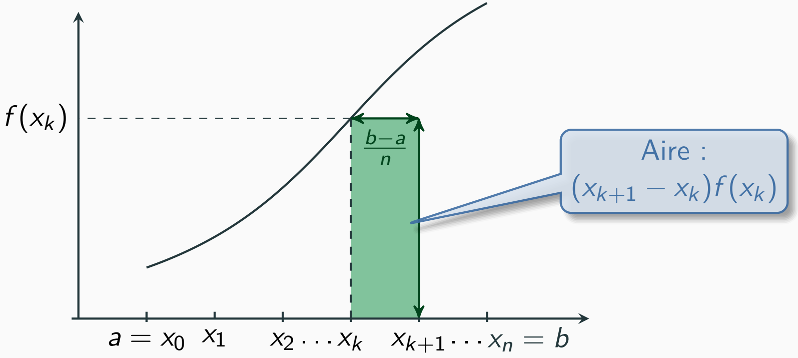
1 Définition et convergence des sommes des Riemann

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

Définition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle sommes de Riemann de f :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$



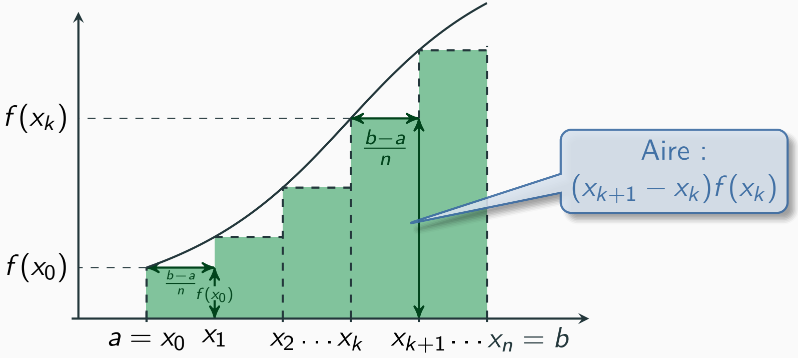
1 Définition et convergence des sommes des Riemann

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

Définition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle sommes de Riemann de f :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \qquad S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$



1 Définition et convergence des sommes des Riemann

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

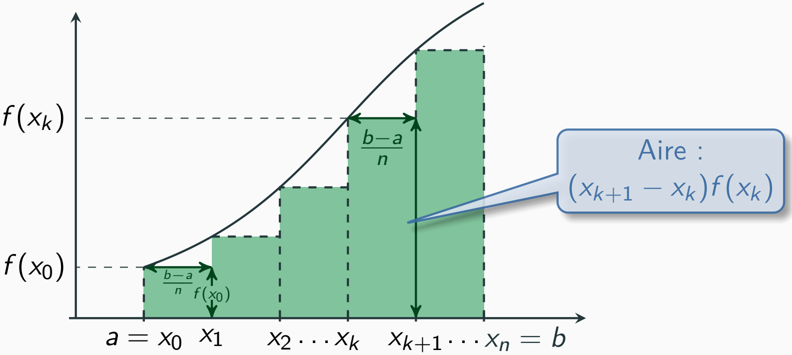
$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle sommes de Riemann de f :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$



$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$$

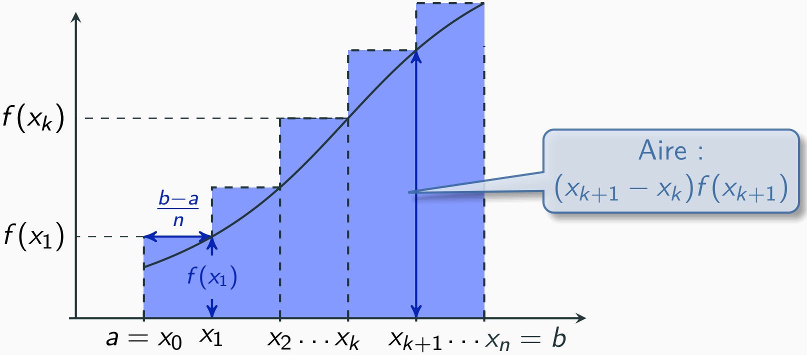
$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

Définition 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle sommes de Riemann de f :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$



1 Définition et convergence des sommes des Riemann

Théorème 1

Les suites $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et :

1 Définition et convergence des sommes des Riemann

Théorème 1

Les suites $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f) =$$

1 Définition et convergence des sommes des Riemann

Théorème 1

Les suites $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

1 Définition et convergence des sommes des Riemann

Théorème 1

Les suites $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 1

Démontrer le résultat pour $(R_n(f))$ *dans le cas où* f *est* M*-lipschitzienne* pour un certain $M > 0$.

Remarque

Très souvent, on peut choisir $[a\,,b] = [0\,,1]$.

Cas particulier très important

Remarque

Très souvent, on peut choisir $[a\,,b] = [0\,,1]$.

Cas particulier très important

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cas particulier très important

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 1 : Etudier la limite de (u_n)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

2 Application à la convergence de certaines suites

Cas particulier très important

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 1 : Etudier la limite de (u_n)

On fait apparaître $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

2 Application à la convergence de certaines suites

Cas particulier très important

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 2 : Trouver un équivalent de S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$$

II Formules de Taylor « globales »

1 Formule de Taylor à reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

1 Formule de Taylor à reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

mêmes termes que dans un DL

Reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

1 Formule de Taylor à reste intégral

mêmes termes que dans un DL

Reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Rappel. Lorsque f est $\mathscr{C}^n$

Taylor-Young s'écrit :

1 Formule de Taylor à reste intégral

mêmes termes que dans un DL

Reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Rappel. Lorsque f est $\mathscr{C}^n$

Taylor-Young s'écrit : $f(b) \underset{b \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k +$

1 Formule de Taylor à reste intégral

mêmes termes que dans un DL

Reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Rappel. Lorsque f est $\mathscr{C}^n$

Taylor-Young s'écrit : $f(b) \underset{b\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \boxed{o((b-a)^n)}$

1 Formule de Taylor à reste intégral

mêmes termes que dans un DL

Reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remplace le « $o(b-a)^n$ »

Rappel. Lorsque f est $\mathscr{C}^n$

Taylor-Young s'écrit : $f(b) \underset{b \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \boxed{o((b-a)^n)}$

1 Formule de Taylor à reste intégral

mêmes termes que dans un DL

Reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 1

Démontrer cette formule par récurrence sur n.

Remplace le « $o(b-a)^n$ »

Rappel. Lorsque f est $\mathscr{C}^n$

Taylor-Young s'écrit : $f(b) \underset{b \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \boxed{o((b-a)^n)}$

1 Formule de Taylor à reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

SF 12 : Majorer ou minorer $f(x)$ par des polynômes

1 Formule de Taylor à reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

SF 12 : Majorer ou minorer $f(x)$ par des polynômes

- On applique la formule de Taylor à reste intégral à f

1 Formule de Taylor à reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

SF 12 : Majorer ou minorer $f(x)$ par des polynômes

- On applique la formule de Taylor à reste intégral à f
- On majore/minore le reste intégral

1 Formule de Taylor à reste intégral

Théorème 1 : Formule de Taylor à reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

SF 12 : Majorer ou minorer $f(x)$ par des polynômes

- On applique la formule de Taylor à reste intégral à f
- On majore/minore le reste intégral

Exemple 1 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

ou $[b\,,a]$

Théorème 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a\,,b]$

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

ou $[b\,,a]$

Théorème 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a\,,b]$

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

$$= \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ou $[b\,,a]$

Théorème 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a\,,b]$

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Exercice 2

Etablir cette inégalité à l'aide de la formule de Taylor à reste intégral.

Théorème 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a\,,b]$:

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

M_{n+1} est à trouver

Théorème 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a\,,b]$:

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leq\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$$

M_{n+1} est à trouver

Théorème 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a\,,b]$:

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$$

Exemple 2

1. En appliquant l'inégalité ci-dessus à l'exponentielle, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

M_{n+1} est à trouver

Théorème 2 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et si M_{n+1} majore $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a\,,b]$:

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}$$

Exemple 2

2. En appliquant l'inégalité ci-dessus une fonction f bien choisie, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$.

3 Bilan sur les formules de Taylor

Cadre

Chaque formule estime : $$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Formules de Taylor	
Taylor-Young	$R_n(x) \underset{x \to a}{=} o\big((x-a)^n\big)$
Taylor reste intégral	$R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$
Taylor Lagrange	$\lvert R_n(x)\rvert \leq \dfrac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$

3 Bilan sur les formules de Taylor

Cadre

Chaque formule estime : $$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Formules de Taylor	
Taylor-Young	$R_n(x) \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n)$
Taylor reste intégral	$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$
Taylor Lagrange	$\lvert R_n(x)\rvert \leq \frac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$

estimation locale

Cadre

Chaque formule estime : $$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Formules de Taylor	
Taylor-Young	$R_n(x) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^n)$
Taylor reste intégral	$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$
Taylor Lagrange	$\lvert R_n(x)\rvert \leq \frac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$

estimation locale

expression globale

3 Bilan sur les formules de Taylor

Cadre

Chaque formule estime : $$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Formules de Taylor	
Taylor-Young	$R_n(x) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^n)$
Taylor reste intégral	$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$
Taylor Lagrange	$\lvert R_n(x)\rvert \leq \frac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$

estimation locale

expression globale

estimation globale

III Approximations de sommes par recours aux intégrales

1 La ruse de l'intégrale de t^k

SF 13 : Mettre une somme sous forme intégrale

Exercice 1

Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

SF 13 : Mettre une somme sous forme intégrale

Exercice 1

Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

2 Encadrement d'une somme par une intégrale

SF 14 : Effectuer une comparaison somme-intégrale

Exercice 2 : $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est décroissante

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2 Encadrement d'une somme par une intégrale

Exemple 1

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \ln k \geq n \ln n - n + 1.$

Exemple 2 : La somme harmonique : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que : $H_n \sim \ln n$.

Exemple 3 : $\alpha \in \,]0\,,1[$

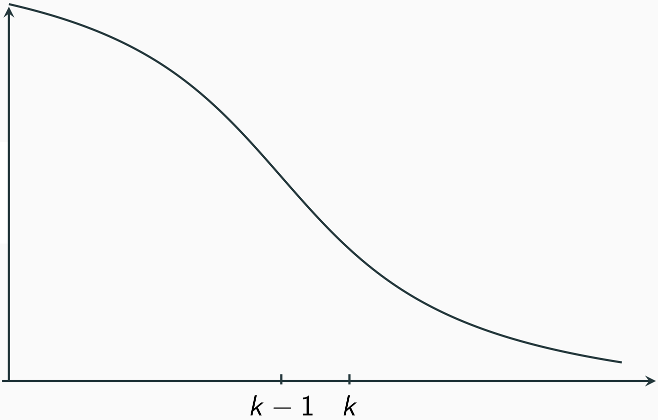
Déterminer un équivalent de : $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

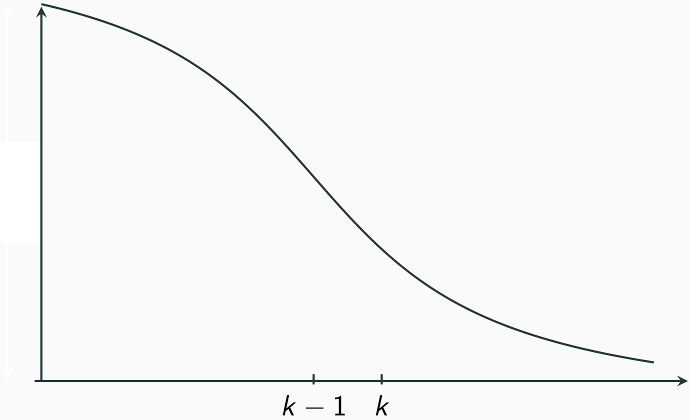
Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :



Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n \to +\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t}$

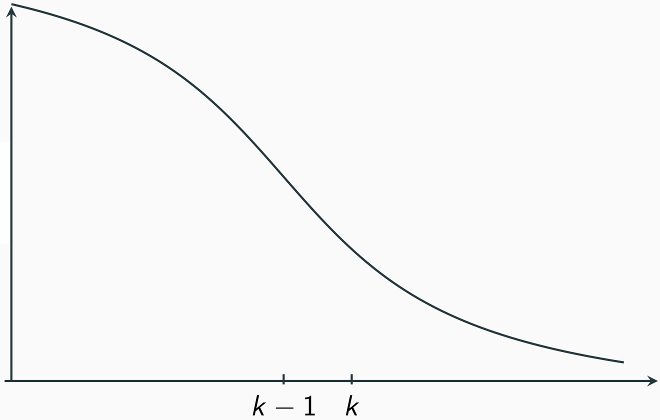


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell}$

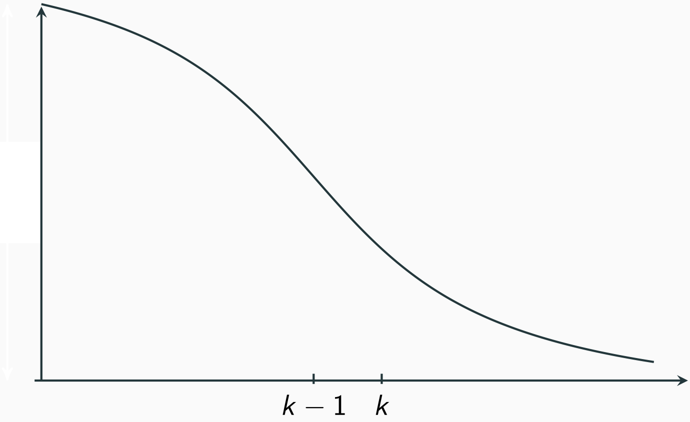


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$

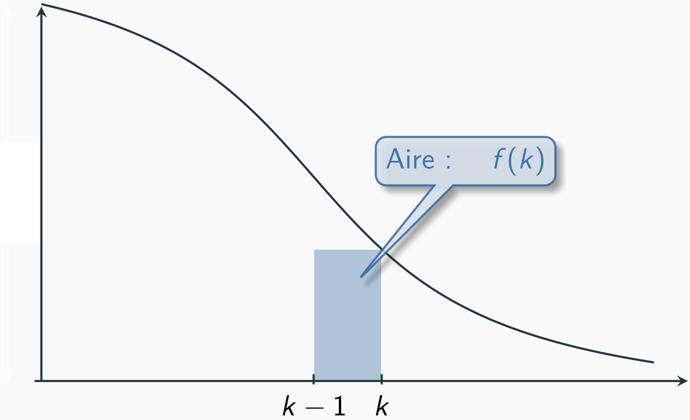


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

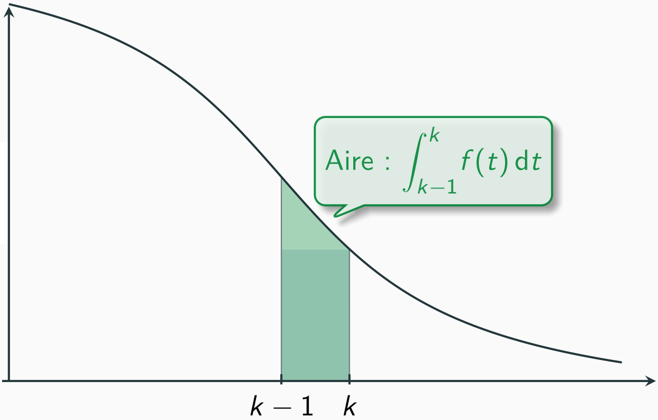
Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$



Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$

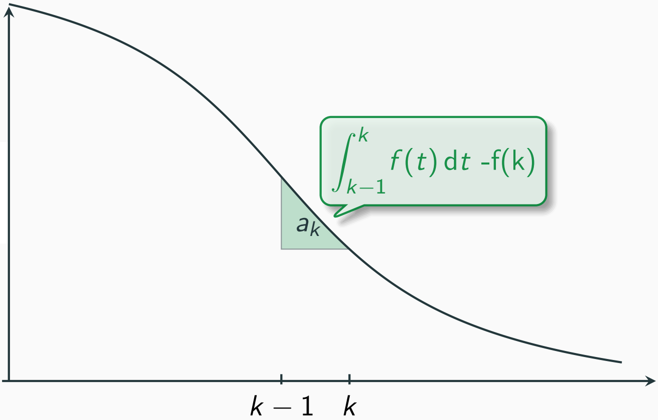


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$

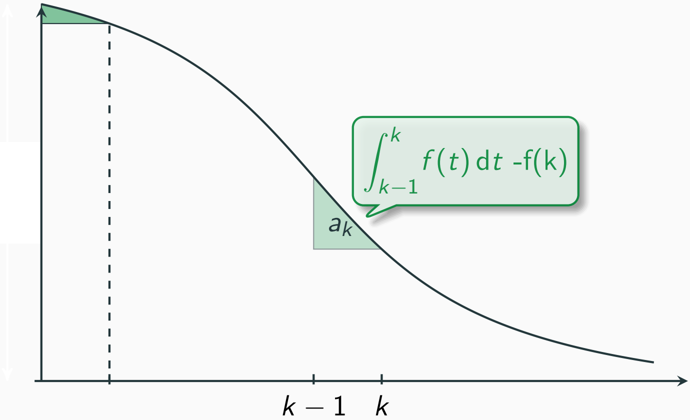


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n \to +\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$

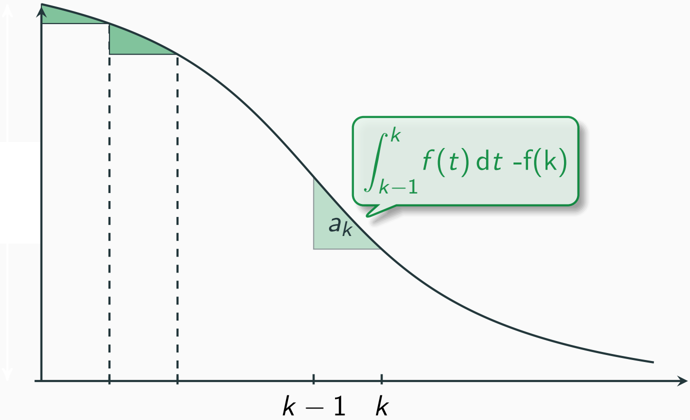


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$



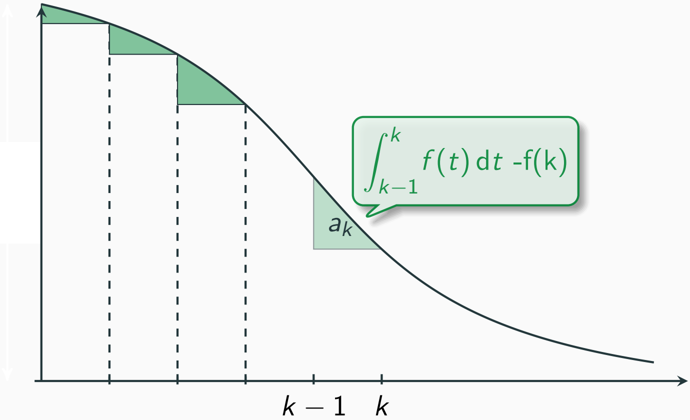
3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$

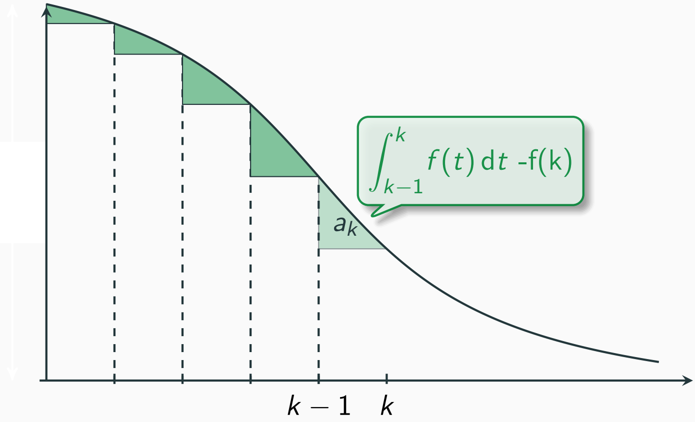


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

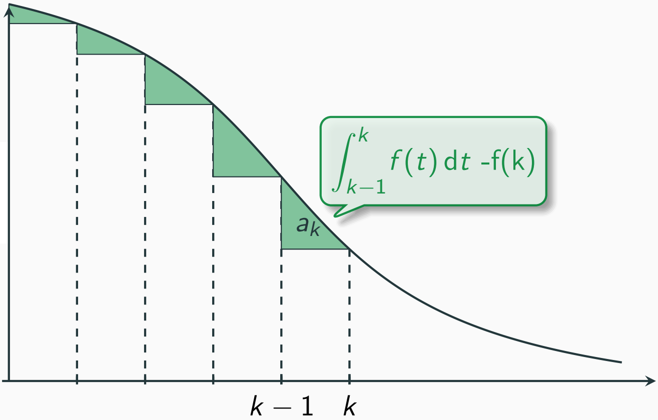
Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$



Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

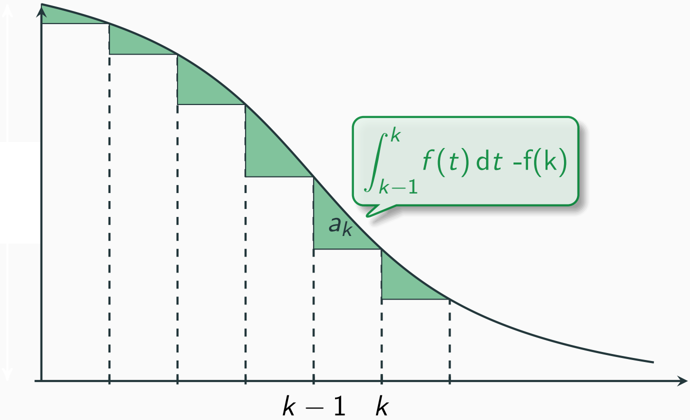
Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$



Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

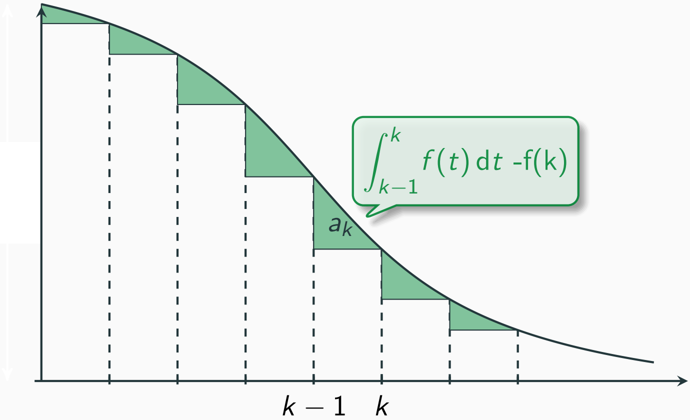
Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$



Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$

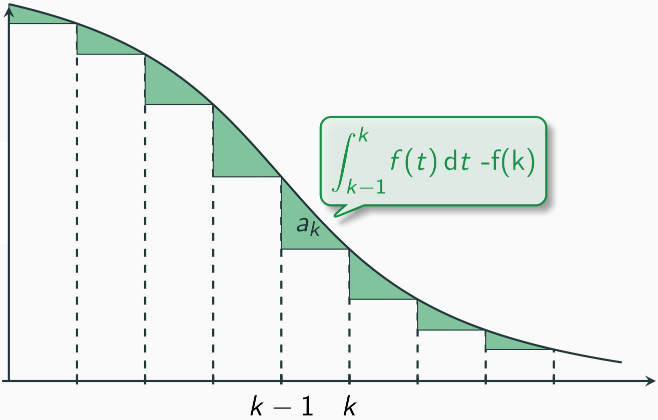


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n \to +\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$

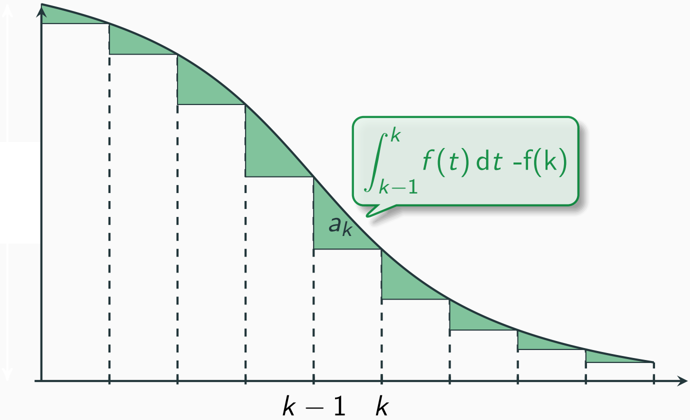


Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$

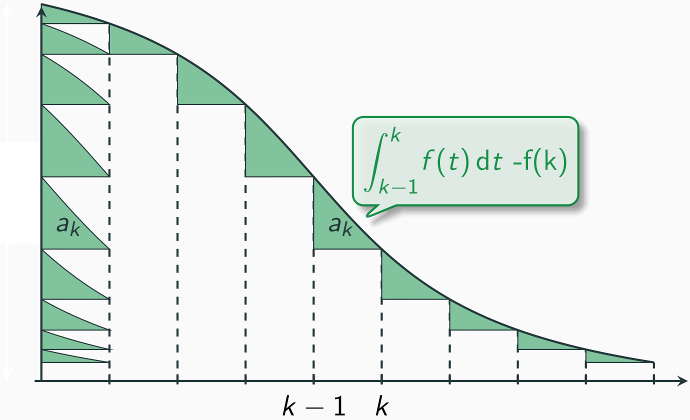


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$

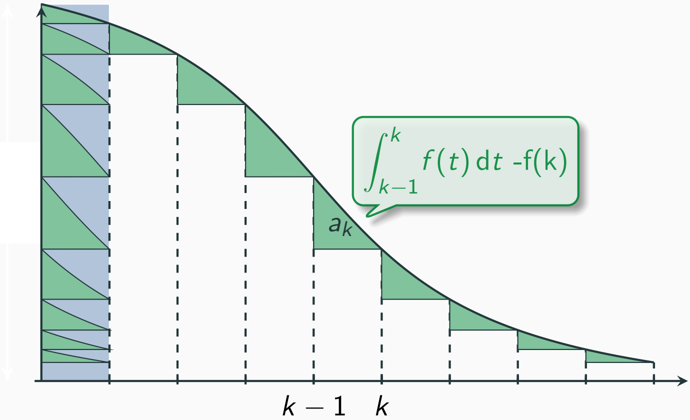


3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

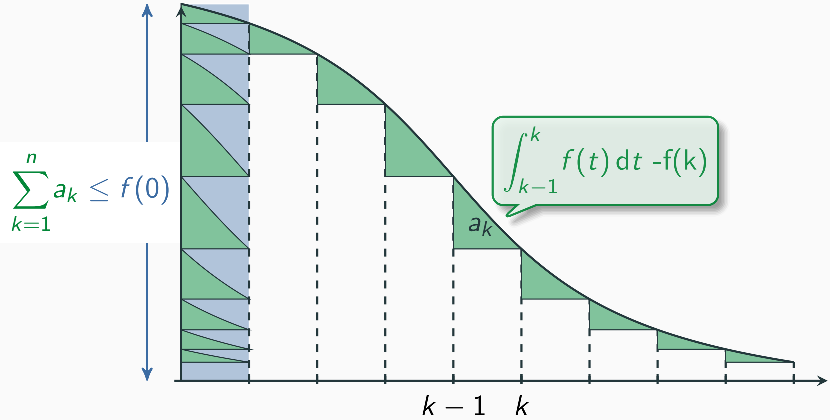
Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$



Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$



Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$

Développement asymptotique de la somme harmonique

Appliqué avec $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1\,,+\infty[$ on obtient :

3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n \to +\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$

Développement asymptotique de la somme harmonique

Appliqué avec $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1\,,+\infty[$ on obtient :

$$H_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$

Développement asymptotique de la somme harmonique

Appliqué avec $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1\,,+\infty[$ on obtient :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$

Développement asymptotique de la somme harmonique

Appliqué avec $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1\,, +\infty[$ on obtient :

$$\underbrace{H_n}_{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{\ln n}_{\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} + \gamma + o(1)$$

3 Développement asymptotique somme-intégrale

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$

Développement asymptotique de la somme harmonique

Appliqué avec $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1\,, +\infty[$ on obtient :

$$\underbrace{H_n}_{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{\ln n}_{\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} + \underbrace{\gamma}_{\text{Constante d'Euler}} + o(1)$$

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante.

Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} f(k) \underset{n \to +\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \ell + o(1)}$$

Développement asymptotique de la somme harmonique

Appliqué avec $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1\,, +\infty[$ on obtient :

$$\underbrace{H_n}_{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \underset{n \to +\infty}{=} \underbrace{\ln n}_{\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} + \underbrace{\gamma}_{\text{Constante d'Euler}} + o(1)$$

Développement asymptotique à deux termes

IV Approximation d'une fonction continue par morceaux

1 Continuité uniforme

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

1 Continuité uniforme

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$\forall x \in I,$

1 Continuité uniforme

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$\forall x \in I, \ \forall \varepsilon > 0,$

1 Continuité uniforme

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid$

1 Continuité uniforme

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall y \in I$

1 Continuité uniforme

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \mid \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

1 Continuité uniforme

dépend de ε

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_\varepsilon > 0 \mid \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

1 Continuité uniforme

dépend de ε
et de x

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_{\varepsilon,x} > 0 \mid \forall y \in I,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

1 Continuité uniforme

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

dépend de ε
et de x

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_\varepsilon > 0 \mid \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

1 Continuité uniforme

dépend de ε

et de x

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_\varepsilon > 0 \mid \forall y \in I,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I, \quad |y-x| \leq \alpha \implies |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$$

Cadre

dépend de ε et de x

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_\varepsilon > 0 \mid \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

le même pour tous les x

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I,\quad |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

1 Continuité uniforme

Cadre

dépend de ε

et de x

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_\varepsilon > 0 \mid \forall y \in I,\ |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

le même pour tous les x

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I,\quad |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarque

1. Si f est uniformément continue sur I :

1 Continuité uniforme

Cadre

dépend de ε et de x

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0 \mid \forall y \in I, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

le même pour tous les x

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I, \quad |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarque

1. Si f est uniformément continue sur I : elle y est continue.

Cadre

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

dépend de ε et de x

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_\varepsilon > 0 \mid \forall y \in I,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

le même pour tous les x

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I,\quad |y-x| \leq \alpha \implies |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarque

1. Si f est uniformément continue sur I : elle y est continue.
2. Si f est lipshitzienne sur I :

1 Continuité uniforme

Cadre

dépend de ε
et de x

$f : I \to \mathbb{K}$ est continue *i.e.* :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha_\varepsilon > 0 \mid \forall y \in I,\ |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

le même pour tous les x

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I,\quad |y-x| \leq \alpha \implies |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarque

1. Si f est uniformément continue sur I : elle y est continue.
2. Si f est lipshitzienne sur I : elle y est uniformément continue.

1 Continuité uniforme

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I, \quad |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarque

1. Si f est uniformément continue sur I : elle y est continue.
2. Si f est lipshitzienne sur I : elle y est uniformément continue.

Exercice 1

Démontrer le point 2.

1 Continuité uniforme

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I, \quad |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Théorème 1 : (Théorème de Heine)

1 Continuité uniforme

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I, \quad |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Théorème 1 : (Théorème de Heine)

Si f est continue sur un segment $[a\,, b]$,

1 Continuité uniforme

Définition 1

f est *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \mid \forall x, y \in I, \quad |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Théorème 1 : (Théorème de Heine)

Si f est continue sur un segment $[a\,,b]$, alors elle y est uniformément continue.

Exercice 2

Démontrer le théorème par l'absurde.

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Cadre

$f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

f est bornée sur $[a\,,b]$:

Cadre

$f\ :[a\,,b]\to\mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,,b]$

f est bornée sur $[a\,,b]$:

Cadre

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,,b]$

Théorème 2

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a\,,b]$ telle que :

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

f est bornée sur $[a\,,b]$:

Cadre

$f\ : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,,b]$

Théorème 2

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a\,,b]$ telle que :

$$\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

f est bornée sur $[a\,,b]$:
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Cadre

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,,b]$

Théorème 2

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a\,,b]$ telle que :

$$\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

f est bornée sur $[a\,,b]$:
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Cadre

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,,b]$

Théorème 2

i.e. : $\forall x \in [a\,,b], \quad |\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a\,,b]$ telle que :

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

f est bornée sur $[a\,,b]$:
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Cadre

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,,b]$

i.e. : $\forall x \in [a\,,b], \quad |\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Théorème 2

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a\,,b]$ telle que :
$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

Exercice 3

Démontrer le théorème.

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

f est bornée sur $[a\,,b]$:
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

Cadre

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur le segment $[a\,,b]$

Théorème 2

i.e. : $\forall x \in [a\,,b], \quad |\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a\,,b]$ telle que :

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

Exercice 4

Justifier l'existence d'une suite (φ_p) de fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ telle que $\quad \|f - \varphi_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice 2

Justifier l'existence d'une suite (φ_p) de fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ telle que $\quad \|f-\varphi_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Conséquence (rappel)

On peut *prolonger* l'intégrale des fonction en escalier aux fonctions continues par morceaux :

Exercice 2

Justifier l'existence d'une suite (φ_p) de fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ telle que $\quad \|f-\varphi_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Conséquence (rappel)

On peut *prolonger* l'intégrale des fonction en escalier aux fonctions continues par morceaux :

- La suite $\left(\int_{[a\,,b]} \varphi_p\right)$ est convergente.

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Exercice 2

Justifier l'existence d'une suite (φ_p) de fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ telle que $\quad \|f - \varphi_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Conséquence (rappel)

intégrale d'une fonction en escalier

On peut *prolonger* l'intégrale des fonction en escalier aux fonctions continues par morceaux :

- La suite $\left(\int_{[a\,,b]} \varphi_p\right)$ est convergente.

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Exercice 2

Justifier l'existence d'une suite (φ_p) de fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ telle que $\quad \|f-\varphi_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Conséquence (rappel)

intégrale d'une fonction en escalier

On peut *prolonger* l'intégrale des fonction en escalier aux fonctions continues par morceaux :

- La suite $\left(\displaystyle\int_{[a\,,b]} \varphi_p\right)$ est convergente.
- Sa limite ne dépend pas du choix de (φ_p).

Exercice 2

Justifier l'existence d'une suite (φ_p) de fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ telle que $\quad \|f - \varphi_p\|_\infty \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Conséquence (rappel)

intégrale d'une fonction en escalier

On peut *prolonger* l'intégrale des fonction en escalier aux fonctions continues par morceaux :

- La suite $\left(\displaystyle\int_{[a\,,b]} \varphi_p\right)$ est convergente.
- Sa limite ne dépend pas du choix de (φ_p).
- On pose : $\quad \displaystyle\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=}$

Exercice 2

Justifier l'existence d'une suite (φ_p) de fonctions en escalier sur $[a\,,b]$ telle que $\quad \|f - \varphi_p\|_\infty \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Conséquence (rappel)

intégrale d'une fonction en escalier

On peut *prolonger* l'intégrale des fonction en escalier aux fonctions continues par morceaux :

- La suite $\left(\int_{[a\,,b]} \varphi_p\right)$ est convergente.
- Sa limite ne dépend pas du choix de (φ_p).
- On pose : $\displaystyle \int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{p\to+\infty} \int_{[a\,,b]} \varphi_p$

2 Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Théorème 2

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe une fonction φ en escalier sur $[a\,,b]$ telle que :

$$\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$$

Exemple 1 : Riemann-Lebesgue pour $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b],\mathbb{R})$

On souhaite montrer : $$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

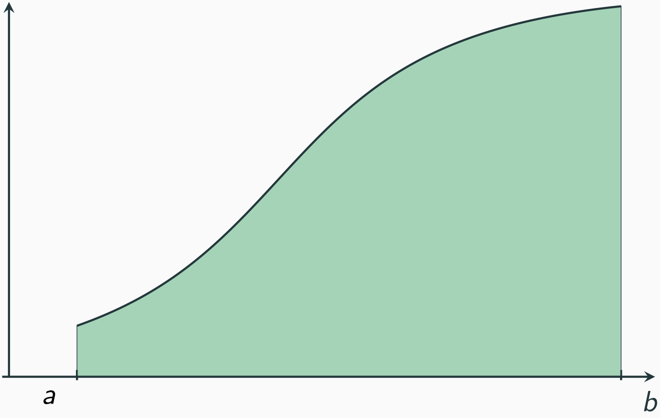
1. Démontrer le résultat lorsque f est en escalier.
2. Conclure dans le cas général.

V Calcul approché d'intégrales

Cadre

Objectif

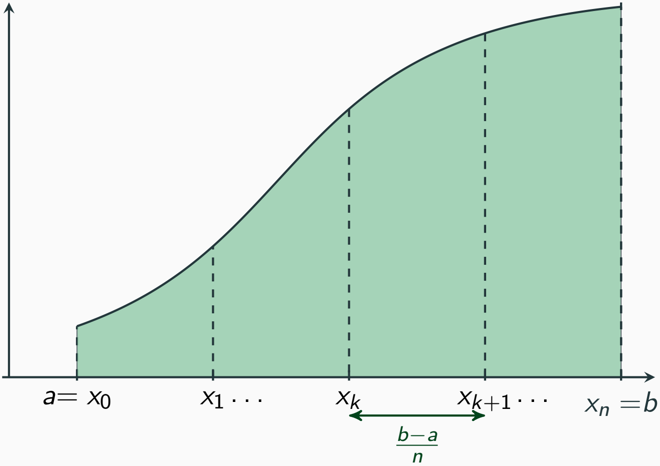
Approcher : $\quad I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$



Cadre

Objectif

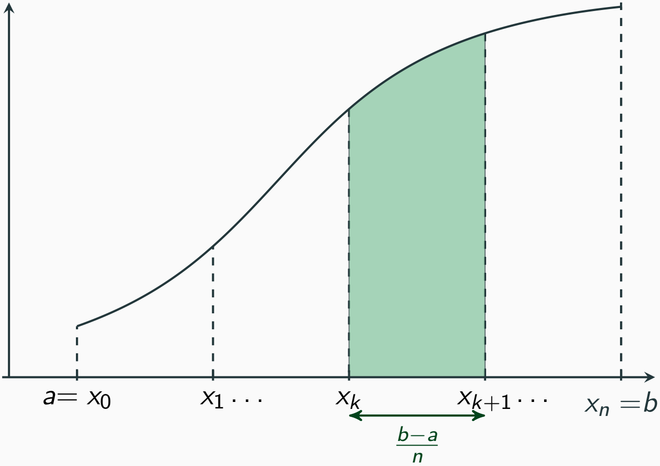
Approcher : $$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Cadre

Objectif

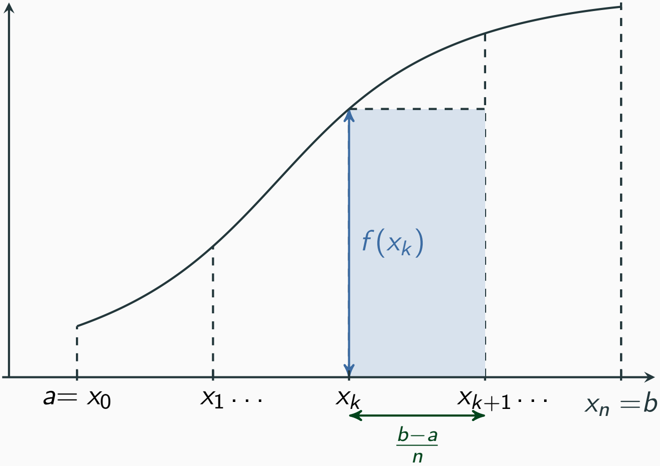
Approcher : $$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt$$



Objectif

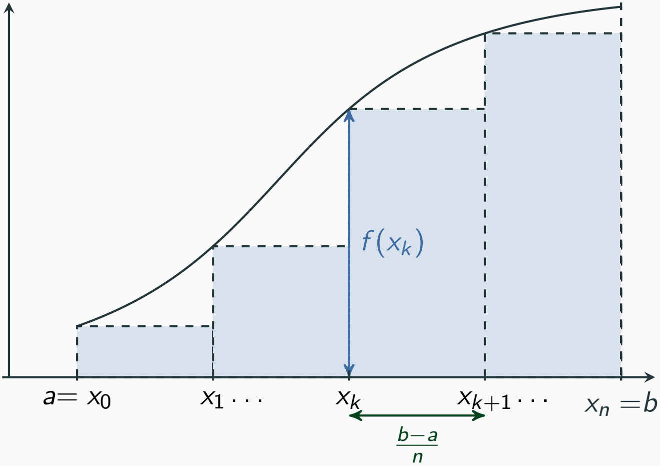
Approcher : $I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$

$\approx (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$



Objectif

Approcher : $$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

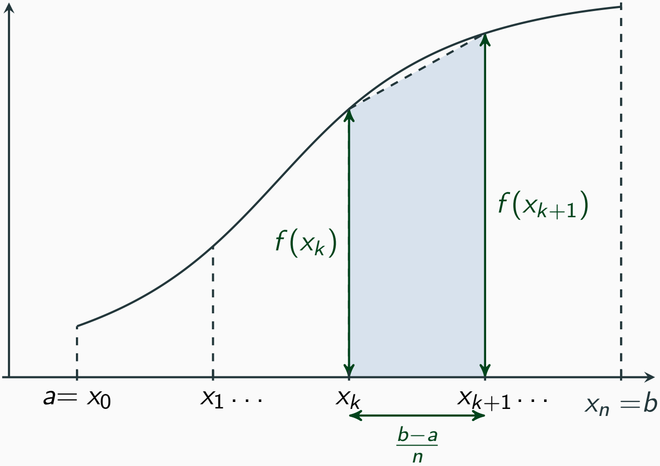


2 Méthode des trapèzes

Objectif

Approcher : $I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt$

$\approx (x_{k+1} - x_k)\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$



2 Méthode des trapèzes

Objectif

Approcher : $$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$