Matrices et Applications linéaires

(Matrices – Niveau 2)

Chapitre 27

I Rôle représentatif des matrices

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_p)$ est une base de E.
- $\mathscr{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ est une base de F.

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_p)$ est une base de E.
- $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n)$ est une base de F.

Rappel

La donnée de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ équivaut à la donnée :

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.
- F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- $\mathscr{B} = (b_1, \dots, b_p)$ est une base de E.
- $\mathscr{C} = (c_1, \dots, c_n)$ est une base de F.

Rappel

La donnée de $f \in \mathscr{L}(E, F)$ équivaut à la donnée : des p vecteurs $f(b_1), \dots, f(b_p)$.

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, est la matrice dont la j^{e} colonne est formée des coordonnées de $f(b_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, est la matrice dont la j^{e} colonne est formée des coordonnées de $f(b_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow c_1 \\ \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice
$A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array} \end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

1 Matrice d’une application linéaire

Définition 1

C’est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\forall j \in [\![1\,,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \quad c_i$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,n} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\forall j \in [\![1\,,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,n} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\forall j \in [\![1\,,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{matrix}
\end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\forall j \in [\![1\,,\,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

Exemple 1 : Matrice de $f : (x, y, z) \mapsto (2x + z, x - y + z)$

1. $\mathscr{B} = ((1, 0, 0)\,,\,(0, 1, 0)\,,\,(0, 0, 1))$ et $\mathscr{C} = ((1, 0)\,,\,(0, 1))$

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\forall j \in [\![1\,,\,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

Exemple 1 : Matrice de $f : (x, y, z) \mapsto (2x + z, x - y + z)$

2. $\mathscr{B} = ((1, 0, 0)\,,\,(0, 1, 0)\,,\,(0, 0, 1))$ et $\mathscr{C}' = ((1, 0)\,,\,(1, 1))$.

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\forall j \in [\![1\,,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

Exemple 1 : Matrice de $f : (x, y, z) \mapsto (2x + z, x - y + z)$

3. $\mathscr{B}' = ((1, 0, 0)\,, (1, 1, 0)\,, (1, 1, 1))$ et $\mathscr{C}' = ((1, 0)\,, (1, 1))$.

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice
$A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :
$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc}
f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow
\end{array} & \\
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p}
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c}
\leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n
\end{array}
\end{array}$$

ou encore :

$$\forall j \in [\![1\,,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

Exemple 2 : $f : P \mapsto P(X+1)$ **de** $\mathbb{R}_3[X]$ **dans** $\mathbb{R}_3[X]$

Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array}
\end{array}$$

$$\forall j \in [\![1\,,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

Exemple 3 : $f : P \mapsto P - P'$ **de** $\mathbb{K}_n[X]$ **dans** $\mathbb{K}_n[X]$

Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

1 Matrice d'une application linéaire

Définition 1

C'est la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que :

$a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans $\mathscr{C}$ du vecteur $f(b_j)$.

ou encore :

$$\forall j \in [\![1\,,p]\!],\ f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} c_i$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(b_1) & & f(b_j) & & f(b_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow c_1 \\ \\ \leftarrow c_i \\ \\ \leftarrow c_n \end{array} \end{array}$$

Coord. dans $\mathscr{C}$ de $f(b_j)$

Exemple 4 : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

Quelle est la matrice de Id_E dans une base $\mathscr{B}$ de E ?

Exemple 5 : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu’il existe :

- des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$
- une base $\mathscr{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de E

tels que pour tout $i \in [\![1\,, n]\!]$: $\quad b_i \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$.
Quelle est la matrice de f dans $\mathscr{B}$?

Remarque

Plus généralement, si $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ est une famille de p-vecteurs de F, on appelle *matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{C}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\mathscr{F}$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{C}$

Remarque

Plus généralement, si $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ est une famille de p-vecteurs de F, on appelle *matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{C}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}} \mathscr{F}$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{C}$

Exemple 6 : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni de la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$

Donner la matrice dans $\mathscr{B}$ de (P_1, P_2, P_3) où

$$P_1 = -X^3 + 2X^2 - 3X + 4 \qquad P_2 = 2X^2 - 3 \qquad P_3 = 4X^3 - X$$

2 Correspondance : « application linéaire $\leftrightarrow$ matrice »

Théorème 1

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est

2 Correspondance : « application linéaire $\leftrightarrow$ matrice »

Théorème 1

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

2 Correspondance : « application linéaire ↔ matrice »

Théorème 1

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

Exercice 1

L'énoncé du théorème contient deux propriétés. Préciser ces deux propriétés.

Théorème 1

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

Exercice 2

Démontrer que : $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Théorème 1

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

2 Correspondance : « application linéaire $\leftrightarrow$ matrice »

Théorème 1

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

C'est l'application $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de matrice A dans les bases canoniques.

2 Correspondance : « application linéaire $\leftrightarrow$ matrice »

Théorème 1

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

C'est l'application $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de matrice A dans les bases canoniques.

Notation : noyau et image d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

2 Correspondance : « application linéaire $\leftrightarrow$ matrice »

Théorème 1

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

Application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

C'est l'application $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ de matrice A dans les bases canoniques.

Notation : noyau et image d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- $\mathrm{Ker}\, A \subset \mathbb{K}^p$ est le noyau de l'application f_A
- $\mathrm{Im}\, A \subset \mathbb{K}^n$ est l'image de f_A

II Dictionnaire : applications linéaires $\leftrightarrow$ matrices

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$(E, \mathscr{B}) \xrightarrow{f} (F, \mathscr{C})$$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\overset{x}{(E,\mathscr{B})} \xrightarrow{f} \overset{y}{(F,\mathscr{C})}$$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\overset{x}{(E,\mathscr{B})} \xrightarrow{f} \overset{y \overset{?}{=} f(x)}{(F,\mathscr{C})}$$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\overset{x}{(E,\mathscr{B})} \ \xrightarrow[A]{f}\ \overset{y \overset{?}{=} f(x)}{(F,\mathscr{C})}$$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\overset{x}{(E,\mathscr{B})} \xrightarrow[A]{f} \overset{y\overset{?}{=}f(x)}{(F,\mathscr{C})}$$

Théorème 1

On note :

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\underset{X}{(E,\overset{x}{\mathscr{B}})} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{(F,\overset{y\overset{?}{=}f(x)}{\mathscr{C}})}$$

Théorème 1

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$.

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\underset{X}{(E,\overset{x}{\mathscr{B}})} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{(F,\overset{y\overset{?}{=}f(x)}{\mathscr{C}})}$$

Théorème 1

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$.

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$$

Alors : $f(x) = y \iff$

Cadre

$$\underset{X}{(E,\overset{x}{\mathscr{B}})} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{(F,\overset{y \overset{?}{=} f(x)}{\mathscr{C}})}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Théorème 1

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ $\quad x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$. $\quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$

Alors : $\quad f(x) = y \iff$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\underset{X}{\overset{x}{(E,\mathscr{B})}} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{\overset{y \overset{?}{=} f(x)}{(F,\mathscr{C})}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Théorème 1

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ $\quad x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$. $\quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$

Alors : $\quad f(x) = y \iff AX = Y$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\underset{X}{\overset{x}{(E,\mathscr{B})}} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{\overset{y \overset{?}{=} f(x)}{(F,\mathscr{C})}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Théorème 1

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ $\qquad x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$. $\qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$

Alors : $\qquad f(x) = y \iff AX = Y$

Exercice 1

Démontrer le théorème en écrivant la décomposition de $f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{X}{\overset{x}{(E,\mathscr{B})}} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{\overset{y \overset{?}{=} f(x)}{(F,\mathscr{C})}}$$

Théorème 1

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ $\quad x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$. $\quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$

Alors : $\quad f(x) = y \iff AX = Y$

Exemple 1 : f est canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $f(x,y,z)$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\underset{X}{(E,\overset{x}{\mathscr{B}})} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{(F,\overset{y\overset{?}{=}f(x)}{\mathscr{C}})}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Théorème 1

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ $\qquad x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$. $\qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$

Alors : $\qquad f(x) = y \iff AX = Y$

Exemple 2 : Trouver le noyau et l'image de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$

f a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\underset{X}{\overset{x}{(E,\mathscr{B})}} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{\overset{y\overset{?}{=}f(x)}{(F,\mathscr{C})}}$$

Théorème

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$.

Alors : $\quad f(x) = y \iff AX = Y$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$$

Exemple 3 : $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ **de matrice** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **dans la b.c.**

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(\varphi - 6\mathrm{Id}_E)$ et une base de $\operatorname{Im}\varphi$

1 Utiliser la matrice pour trouver le noyau et l'image

Cadre

$$\underset{X}{\overset{x}{(E,\mathscr{B})}} \xrightarrow[A]{f} \underset{Y}{\overset{y\overset{?}{=}f(x)}{(F,\mathscr{C})}}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Théorème

On note :

- X la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
- Y la colonne des coordonnées de y dans $\mathscr{C}$.

$x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j$

$y = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$

Alors : $f(x) = y \iff AX = Y$

Exemple 3 : $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ **de matrice** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **dans la b.c.**

2. Trouver une base dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

Cadre

$$\begin{tikzcd}(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "g"] & (G,\mathscr{D})\end{tikzcd}$$

2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

Cadre

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "g"] & (G,\mathscr{D})
\end{tikzcd}$$

Théorème 2

Cadre

$$\begin{tikzcd}(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "g"] & (G,\mathscr{D})\end{tikzcd}$$

Théorème 2

$$\mathrm{Mat}\qquad(g\circ f)=\mathrm{Mat}\qquad(g)\times\mathrm{Mat}\qquad(f)$$

Cadre

$$\begin{tikzcd} (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "g"] & (G,\mathscr{D}) \end{tikzcd}$$

Théorème 2

$$\mathrm{Mat}\qquad (g\circ f) = \mathrm{Mat}\qquad (g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

Cadre

$$\begin{tikzcd} (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "g"] & (G,\mathscr{D}) \end{tikzcd}$$

Théorème 2

$$\mathrm{Mat} \qquad (g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

Cadre

$$
\begin{tikzcd}
(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "g"] & (G,\mathscr{D})
\end{tikzcd}
$$

Théorème 2

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

Cadre

$$\begin{tikzcd}(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "g"] & (G,\mathscr{D})\end{tikzcd}$$

Théorème 2

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Puissances d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k) = A^k}$

2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

Cadre

$$\begin{tikzcd}(E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "g"] & (G,\mathscr{D})\end{tikzcd}$$

Théorème 2

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Puissances d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k) = A^k}$

Exercice 2

Démontrer le théorème 2.

2 Utiliser les matrices pour calculer des composées

Cadre

$$(E,\mathscr{B}) \xrightarrow{f} (F,\mathscr{C}) \xrightarrow{g} (G,\mathscr{D})$$

Théorème 2

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Exemple 4 : $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ **de matrice** $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **dans la b.c.**

a) Montrer que f est une symétrie

b) Trouver une base de ses sous-espaces caractéristiques.

c) Ecrire la matrice de f dans $\mathscr{B}' = (X+1, X^2+1, X^2+X+1)$

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi :

:

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

:

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

Cas d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

f est bijectif ssi $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible et $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \quad}$

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

Cas d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

f est bijectif ssi $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible et $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = A^{-1}}$

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\quad \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas : $\quad \left(\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

Cas d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$

f est bijectif ssi $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible et $\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = A^{-1}}$

Exercice 3

a) Démontrer le théorème.

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

Cas d'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ de n vecteurs de E

$\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

Cas d'une famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ de n vecteurs de E

$\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible

Exercice 3

b) Démontrer la conséquence sur les familles de vecteurs

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

Exemple 5

Montrer que $f : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

3 Utiliser les matrices pour prouver la bijectivité

E et F de même dimension n

Théorème 3

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

L'application f est bijective ssi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas : $\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1})$

Exercice 4 : Conséquence sur l'inversibilité de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Prouver le résultat précédemment admis : « si il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ (ou telle que $BA = I_n$) alors A est inversible ».

Exercice 5

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de p est de la forme : $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Matrice d'un endomorphisme dans une base bien choisie

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

a) Montrer que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

III Changement de base

Problématique générale

Deux matrices associées à une même application $f \in \mathscr{L}(E, F)$

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \qquad \text{et} \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$$

Problématique générale

Deux matrices associées à une même application $f \in \mathscr{L}(E, F)$

$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$

Lien entre
les deux ?

1 Matrice de passage d'une base à une autre

Cadre

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

1 Matrice de passage d'une base à une autre

Cadre

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Définition 1

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underset{\text{déf.}}{=}$$

1 Matrice de passage d'une base à une autre

Cadre

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Définition 1

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') =$$

1 Matrice de passage d'une base à une autre

Cadre

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Définition 1

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underset{\text{déf.}}{=} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') =$$

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b'_1 & & b'_j & & b'_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{coord. selon } b_1 \\ \\ \\ \leftarrow \text{coord. selon } b_n \end{array}$$

1 Matrice de passage d'une base à une autre

Cadre

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Définition 1

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccccc} b'_1 & & b'_j & & b'_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{coord. selon } b_1 \\ \\ \\ \leftarrow \text{coord. selon } b_n \end{array} \end{array}$$

Cadre

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Définition 1

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

En pratique

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la matrice :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b'_1 & & b'_j & & b'_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coord. selon } b_1 \\ \\ \\ \leftarrow \text{coord. selon } b_n \end{array}$$

Cadre

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

Définition 1

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{array}{ccccccc} b'_1 & & b'_j & & b'_n & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ a_{1,1} & \cdots & \boxed{a_{1,j}} & \cdots & a_{1,p} & & \leftarrow \text{coord. selon } b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,n} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} & & \leftarrow \text{coord. selon } b_n \end{array}$$

En pratique

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la matrice : dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimés dans $\mathscr{B}$.

Cadre

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ sont deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} b'_1 & & b'_j & & b'_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \boxed{a_{1,j}} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coord. selon } b_1 \\ \\ \\ \leftarrow \text{coord. selon } b_n \end{array}$$

Définition 1

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \underset{\text{déf.}}{=} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\operatorname{Id}_E)$$

En pratique

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est la matrice : dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimés dans $\mathscr{B}$.

Exemple 1 : $\mathscr{B}' = (u_1, u_2)$ **où** $u_1 = (5,2)$ **et** $u_2 = (2,1)$

$\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ecrire : $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

1 Matrice de passage d'une base à une autre

Théorème 1

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et :

Théorème 1

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et : $\quad (P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$

1 Matrice de passage d'une base à une autre

Théorème 1

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et : $\quad (P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$

Exercice 1

Démontrer le théorème en traduisant l'inversibilité en terme de bijectivité.

1 Matrice de passage d'une base à une autre

Théorème 1

$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et : $\quad (P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$

Exercice 2

Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ à la base $(L_1, \ldots, L_n)$.

a) Montrer que pour tout $j \in [\![0\,,n-1]\!]$: $\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^j L_i = X^j$.

b) En déduire l'expression de P^{-1}.

2 Effet sur la matrice d'une application linéaire

Cadre

$$\begin{tikzcd}
(E',\mathscr{B}') \arrow[rrr, bend left, "f", "A'"'] & (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathscr{C}) & (F',\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.
- $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

2 Effet sur la matrice d'une application linéaire

Cadre

$$\begin{tikzcd}
(E',\mathscr{B}') \arrow[rrr, bend left, "f", "A'"'] & (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathscr{C}) & (F',\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.
- $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

Théorème 2

2 Effet sur la matrice d'une application linéaire

Cadre

$$\begin{tikzcd}
(E',\mathscr{B}') \arrow[rrr, bend left, "f", "A'"'] & (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathscr{C}) & (F',\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.
- $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

Théorème 2

$$A' = Q^{-1}AP$$

2 Effet sur la matrice d'une application linéaire

Cadre

$$\begin{tikzcd} (E',\mathscr{B}') \arrow[rrr, bend left, "f", "A'"'] & (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathscr{C}) & (F',\mathscr{C}') \end{tikzcd}$$

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.
- $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

Théorème 2

$$A' = Q^{-1}AP$$

Exercice 3

Démontrer cette formule en traduisant : $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$.

2 Effet sur la matrice d'une application linéaire

Cadre

$$\begin{tikzcd}
(E',\mathscr{B}') \arrow[r, "\mathrm{Id}_E"] \arrow[rrr, bend left, "f", "A'"'] & (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "\mathrm{Id}_F"] & (F',\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.
- $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

Théorème 2

$$A' = Q^{-1}AP$$

Exercice 3

Démontrer cette formule en traduisant : $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$.

2 Effet sur la matrice d'une application linéaire

Cadre

$$\begin{tikzcd}
(E',\mathscr{B}') \arrow[r, "\mathrm{Id}_E", "P"'] \arrow[rrr, bend left, "f", "A'"'] & (E,\mathscr{B}) \arrow[r, "f", "A"'] & (F,\mathscr{C}) \arrow[r, "\mathrm{Id}_F", "Q^{-1}"'] & (F',\mathscr{C}')
\end{tikzcd}$$

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.
- $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$

Théorème 2

$$A' = Q^{-1}AP$$

Exercice 3

Démontrer cette formule en traduisant : $\quad f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E.$

Cadre

- $f \in \mathscr{L}(E)$.
- $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et : $\quad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f \quad$ et $\quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f$.

3 Effet sur la matrice d'un endomorphisme

Cadre

- $f \in \mathscr{L}(E)$.
- $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et : $\quad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f \quad$ et $\quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f$.

Théorème 3

3 Effet sur la matrice d'un endomorphisme

Cadre

- $f \in \mathscr{L}(E)$.
- $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et : $\quad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f \quad$ et $\quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f$.

Théorème 3

$$A' = P^{-1} A P$$

3 Effet sur la matrice d'un endomorphisme

Cadre

- $f \in \mathscr{L}(E)$.
- $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et : $\quad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f \quad$ et $\quad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'} f$.

Théorème 3

$$A' = P^{-1}AP$$

Exemple 2 : f est canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

1. Trouver une base de $F = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$
2. Exprimer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2)$.
3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Effet sur les coordonnées d'un vecteur

Cadre

- $x \in E$.
- $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et : $\quad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$
- X est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
- X' est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$

4 Effet sur les coordonnées d'un vecteur

Cadre

- $x \in E$.
- $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et : $\quad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$
- X est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
- X' est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$

Théorème 4

$$X = PX'$$

4 Effet sur les coordonnées d'un vecteur

Cadre

- $x \in E$.
- $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et : $\quad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$
- X est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
- X' est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$

Théorème 4

$$X = PX'$$

Exercice 4

Démontrer la formule du théorème.

4 Effet sur les coordonnées d'un vecteur

Cadre

- $x \in E$.
- $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E et : $\quad P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$
- X est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
- X' est la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$

Théorème 4

$$X = PX'$$

Exercice 4

Démontrer la formule du théorème.

Exemple 3 : $v = (2, 3)$.

Trouver les coordonnées x' et y' de v dans la base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2)$.