Compléments d'algèbre linéaire

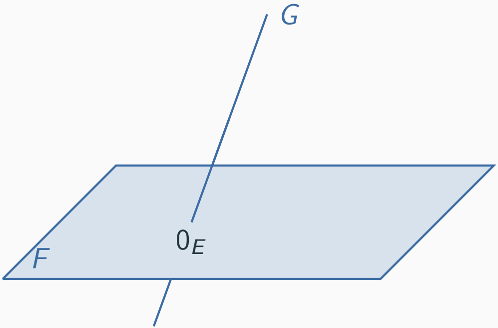
Chapitre 24

I Projecteurs, symétries

Cadre : on suppose $E = F \oplus G$

Rappel

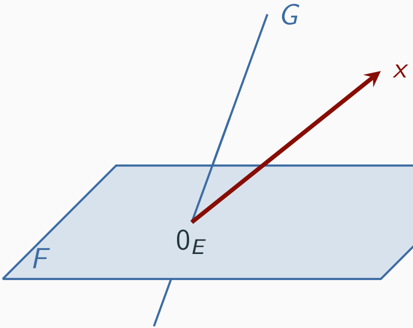
Cela signifie :



Cadre : on suppose $E = F \oplus G$

Rappel

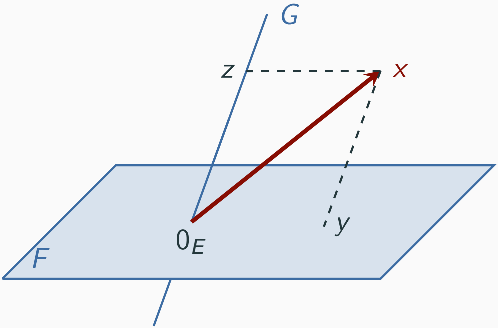
Cela signifie : $\forall x \in E,$



Cadre : on suppose $E = F \oplus G$

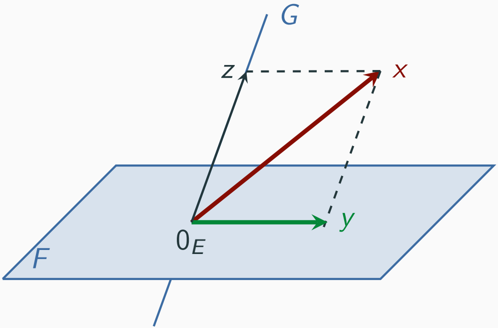
Rappel

Cela signifie : $\forall x \in E, \quad \exists!(y, z) \in E^2 \ |$



Rappel

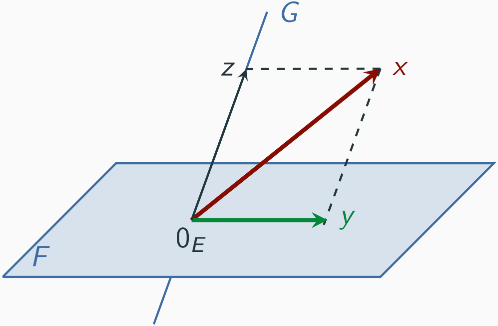
Cela signifie : $\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E^2 \mid \begin{cases} y + z = x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$



1 Projecteurs

Définition 1

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application :

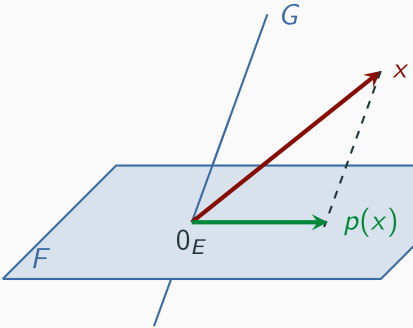


1 Projecteurs

Définition 1

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y \end{array}$$

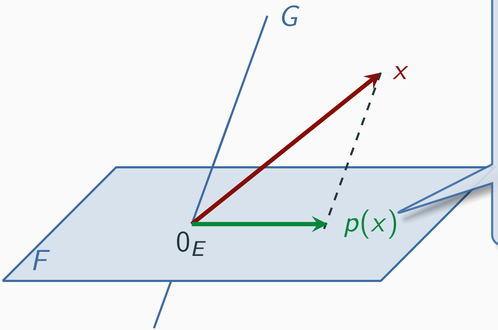


1 Projecteurs

Définition 1

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application :

$$p : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y \end{array}$$



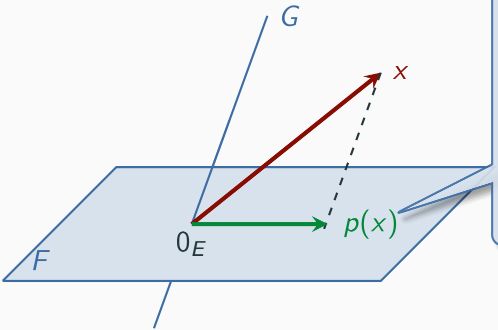
Trois types de questions :

1 Projecteurs

Définition 1

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y \end{array}$$



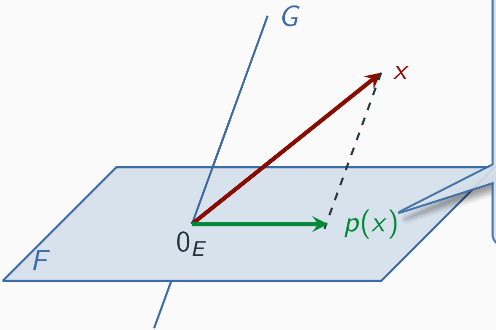
Trois types de questions :

- On donne F et G : calculer $p(x)$

Définition 1

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y \end{array}$$



Trois types de questions :

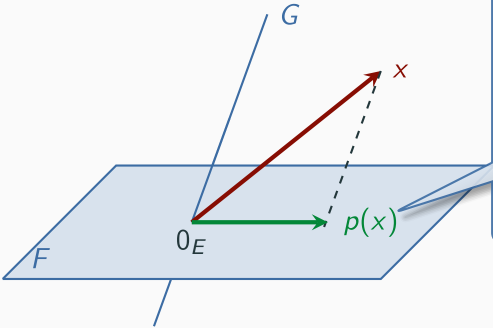
- On donne F et G : calculer $p(x)$
- On donne p : trouver F et G

1 Projecteurs

Définition 1

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application :

$$\begin{array}{rccl} p: & E & \longrightarrow & E \\ & x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y \end{array}$$



Trois types de questions :

- On donne F et G :
  calculer $p(x)$
- On donne p :
  trouver F et G
- On donne $f \in \mathscr{L}(E)$
  M.q. f est un projecteur

1 Projecteurs

Définition 1

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y \end{array}$$

Exercice 1

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$$

1. Vérifier que F et G sont supplémentaires

Définition 1

Le projecteur sur F parallèlement à G est l'application :

$$p : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y \end{array}$$

Exercice 1

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

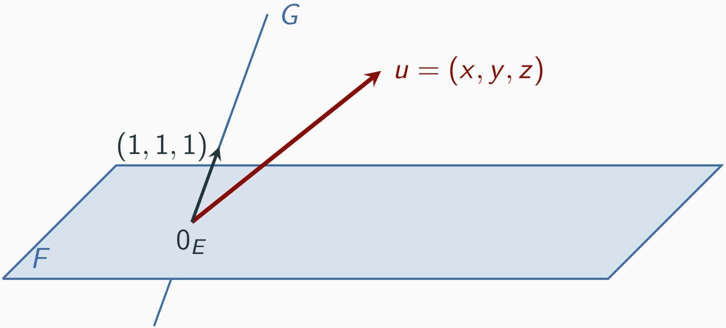
2. Soit $u = (x,y,z)$ et p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer les coordonnées de $p(u)$.

1 Projecteurs

Exercice 1

$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$

2. Soit $u = (x,y,z)$ et p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer les coordonnées de $p(u)$.

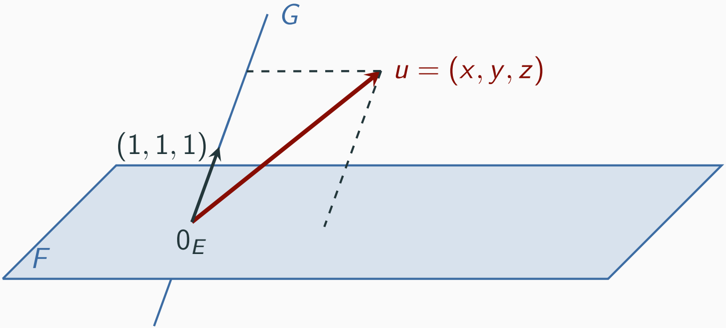


1 Projecteurs

Exercice 1

$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$

2. Soit $u = (x, y, z)$ et p le projecteur sur F parallèlement à G.
   Déterminer les coordonnées de $p(u)$.

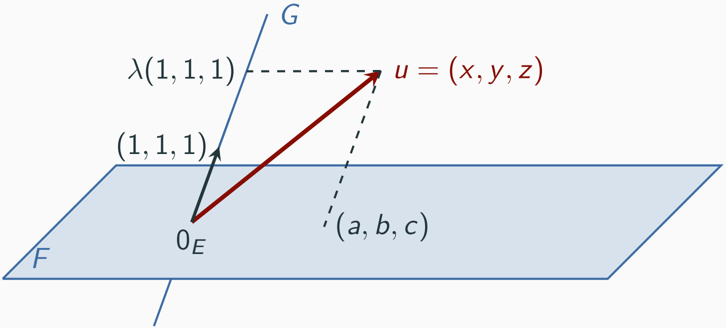


1 Projecteurs

Exercice 1

$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$

2. Soit $u = (x,y,z)$ et p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer les coordonnées de $p(u)$.

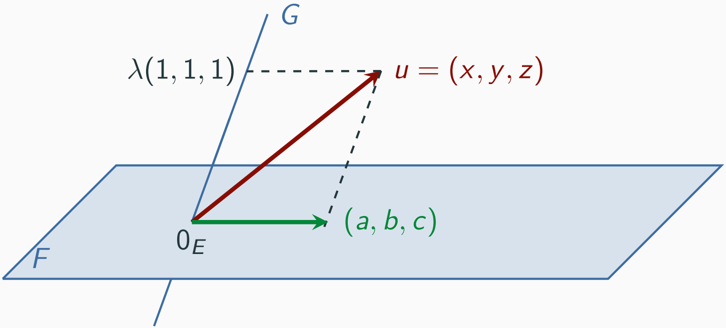


1 Projecteurs

Exercice 1

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

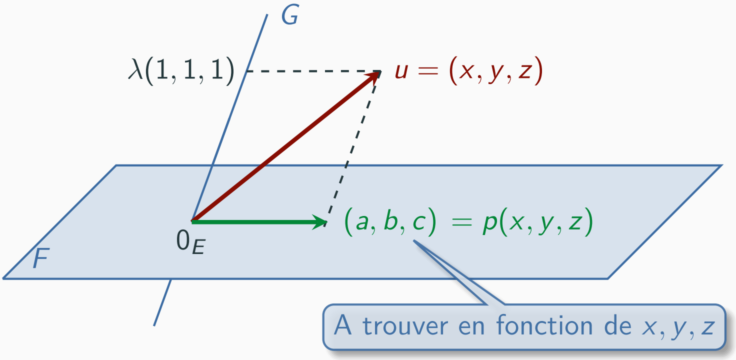
2. Soit $u = (x,y,z)$ et p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer les coordonnées de $p(u)$.



Exercice 1

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

2. Soit $u = (x,y,z)$ et p le projecteur sur F parallèlement à G. Déterminer les coordonnées de $p(u)$.



1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire .

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $\quad p \in \mathscr{L}(E)$.

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $G =$ et $F =$

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p =$

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$

Remarque

$\operatorname{Inv} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$

Remarque

$\operatorname{Inv} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$\operatorname{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\}$$

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$

Remarque

$\operatorname{Inv} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$\operatorname{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(\qquad)$$

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$
3. $p \circ p =$

Remarque

$\operatorname{Inv} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$\operatorname{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$$

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$
3. $p \circ p = p$

Remarque

$\operatorname{Inv} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$\operatorname{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$$

1 Projecteurs

Théorème 1

1. p est linéaire : $p \in \mathscr{L}(E)$.
2. $G = \operatorname{Ker} p$ et $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$
3. $p \circ p = p$

Exercice 2

Démontrer les points 1 et 3.

Remarque

$\operatorname{Inv} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$\operatorname{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$$

1 Projecteurs

Remarque

Inv p est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$\mathrm{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$$

En pratique : image d'un projecteur

$y \in \mathrm{Im}\, p$ signifie :

Remarque

$\operatorname{Inv} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$\operatorname{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$$

En pratique : image d'un projecteur

$y \in \operatorname{Im} p$ signifie : $\quad p(y) = y$

1 Projecteurs

Remarque

Inv p est l'ensemble des vecteurs invariants par p :

$$\mathrm{Inv} p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$$

En pratique : image d'un projecteur

$y \in \mathrm{Im}\, p$ signifie : $\quad p(y) = y$

Exercice 3 : $f \in \mathscr{L}(E)$

Montrer en une ligne que $\mathrm{Inv} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

1 Projecteurs

Théorème 2 : Caractérisation des projecteurs

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

1 Projecteurs

Théorème 2 : Caractérisation des projecteurs

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = f$.

1 Projecteurs

Théorème 2 : Caractérisation des projecteurs

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = f$.
Alors f est un projecteur.

1 Projecteurs

Théorème 2 : Caractérisation des projecteurs

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = f$.
Alors f est un projecteur.

Exercice 4

Démontrer le théorème.

1 Projecteurs

Théorème 2 : Caractérisation des projecteurs

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = f$.

Alors f est un projecteur.

Remarque

Lorsque $p \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, la décomposition du vecteur $x \in E$ selon $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ est donné par : $\boxed{x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p}}$

1 Projecteurs

Utile pour répondre à la question :
« Montrer que f est un projecteur »

Théorème 2 : Caractérisation des projecteurs

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = f$.
Alors f est un projecteur.

Remarque

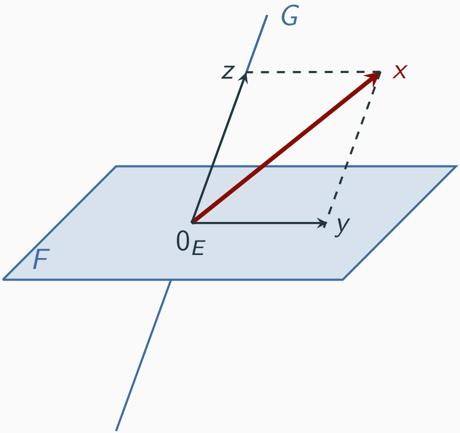
Lorsque $p \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, la décomposition du vecteur $x \in E$ selon $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ est donné par : $\boxed{x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p}}$

2 Symétries

Définition 2

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application

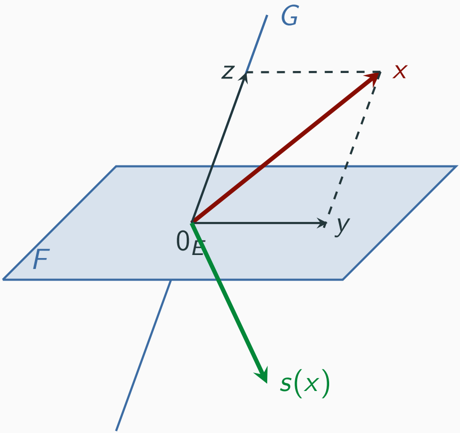
$$\begin{array}{rrcl} s: & E & \longrightarrow & E \\ & x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & \end{array}$$



Définition 2

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application

$$s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & \end{array}$$

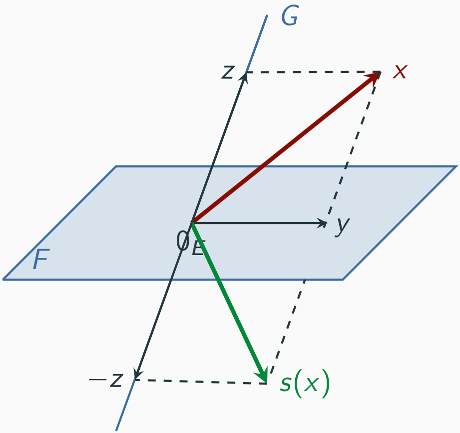


2 Symétries

Définition 2

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application

$$s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y - z \end{array}$$



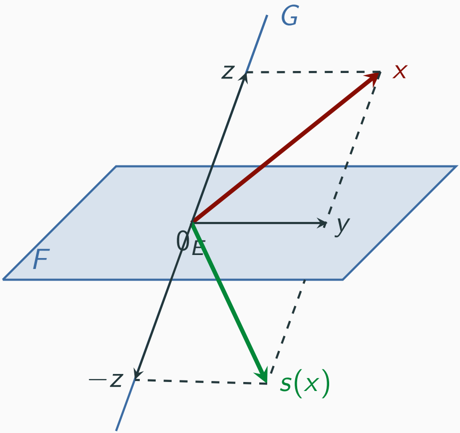
- Lien avec le projecteur p :

$$\boxed{s = \phantom{2p - \mathrm{Id}_E}}$$

Définition 2

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application

$$\begin{array}{rccc} s: & E & \longrightarrow & E \\ & x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y - z \end{array}$$



2 Symétries

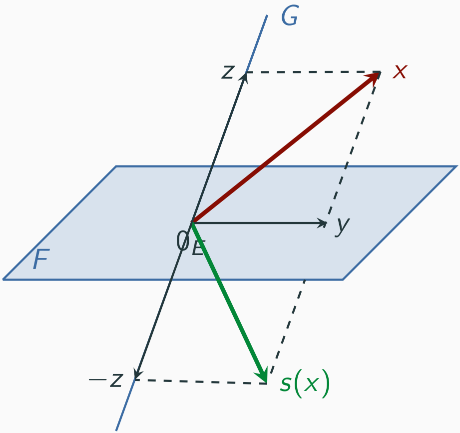
- Lien avec le projecteur p :

$$\boxed{s = 2p - \mathrm{Id}_E}$$

Définition 2

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application

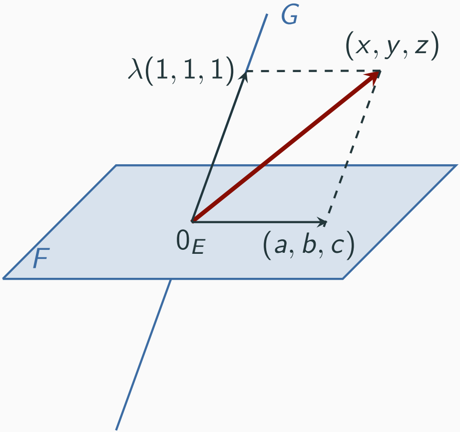
$$\begin{array}{rccc} s : & E & \longrightarrow & E \\ & x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G} & \longmapsto & y - z \end{array}$$



Exercice 5

- F est le plan d'équation $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$
- $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Calculer $s(u)$.

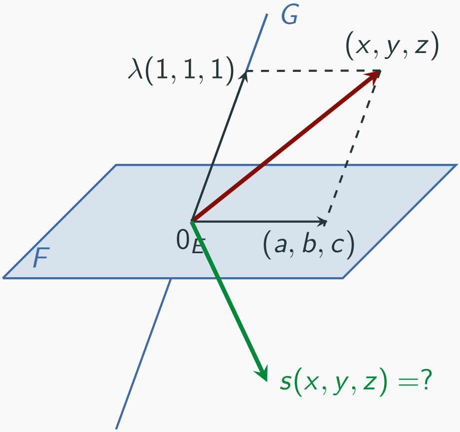


2 Symétries

Exercice 5

- F est le plan d'équation $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c = 0\}$
- $G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Calculer $s(u)$.

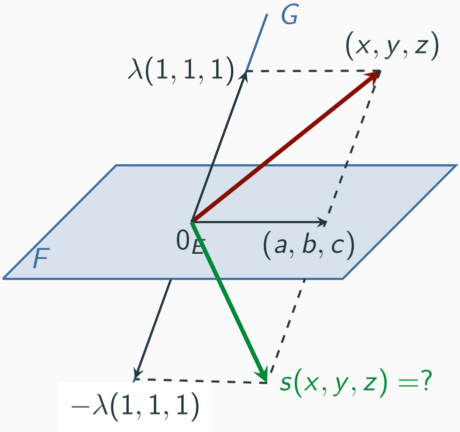


2 Symétries

Exercice 5

- F est le plan d'équation $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$
- $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Calculer $s(u)$.



2 Symétries

Théorème 3

1. s est linéaire .

2 Symétries

Théorème 3

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.

2 Symétries

Théorème 3

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F =$ et $G =$

2 Symétries

Théorème 3

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F = \operatorname{Inv} s$ et $G = \operatorname{AntiInv} s$

2 Symétries

Théorème 3

1. s est linéaire : $\quad s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F = \operatorname{Inv} s \quad$ et $\quad G = \operatorname{AntiInv} s$

Remarque

$\operatorname{AntiInv} s$ est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s :

Théorème 3

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F = \operatorname{Inv} s$ et $G = \operatorname{AntiInv} s$

Remarque

$\operatorname{AntiInv} s$ est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s :

$$\operatorname{AntiInv} s = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$$

Théorème 3

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F = \operatorname{Inv} s$ et $G = \operatorname{AntiInv} s$

Remarque

AntiInv s est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s :

$$\operatorname{AntiInv} s = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(\qquad)$$

2 Symétries

Théorème 3

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F = \operatorname{Inv} s$ et $G = \operatorname{AntiInv} s$
3. $s \circ s =$

Remarque

AntiInv s est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s :

$$\operatorname{AntiInv} s = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$$

Théorème 3

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F = \operatorname{Inv} s$ et $G = \operatorname{AntiInv} s$
3. $s \circ s = \operatorname{Id}_E$

Remarque

AntiInv s est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s :

$$\operatorname{AntiInv} s = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$$

2 Symétries

Théorème 3

1. s est linéaire : $s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F = \operatorname{Inv} s$ et $G = \operatorname{AntiInv} s$
3. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ $(s \in \mathrm{GL}(E)$ et $s^{-1} = s)$

Remarque

AntiInv s est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s :

$$\operatorname{AntiInv} s = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

2 Symétries

Théorème 3

1. s est linéaire : $\quad s \in \mathscr{L}(E)$.
2. $F = \operatorname{Inv} s \quad$ et $\quad G = \operatorname{AntiInv} s$
3. $s \circ s = \mathrm{Id}_E \qquad (s \in \mathrm{GL}(E) \quad$ et $\quad s^{-1} = s)$

Exercice 6

Démontrer le point 2.

Remarque

$\operatorname{AntiInv} s$ est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s :

$$\operatorname{AntiInv} s = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

Théorème 4 : Caractérisation des symétries

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

2 Symétries

Théorème 4 : Caractérisation des symétries

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

2 Symétries

Théorème 4 : Caractérisation des symétries

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
f est une symétrie.

Utile pour répondre à la question :
« Montrer que s est une symétrie »

Théorème 4 : Caractérisation des symétries

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
f est une symétrie.

2 Symétries

Utile pour répondre à la question :
« Montrer que s est une symétrie »

Théorème 4 : Caractérisation des symétries

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
f est une symétrie.

Exercice 7

Etablir : $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide d'une symétrie.