Applications linéaires

Chapitre 23

Cadre

Dans tout le chapitre

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

I Généralités

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$

Remarque

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$ donc :

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$

Remarque

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$ donc : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

endomorphisme si $E = F$

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$

Remarque

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$ donc : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

isomorphisme
$=$
linéaire $+$ bijectif

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$

Remarque

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$ donc : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

automorphisme
$=$
endomorphisme $+$ bijectif

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$

Remarque

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$ donc : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

automorphisme
$=$
endomorphisme $+$ bijectif
ensemble noté $GL(E)$

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$

Remarque

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$ donc : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition 1

Une application $f : E \to F$ est *linéaire* si elle préserve les combinaisons linéaires *i.e.* si :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

forme linéaire si $F = \mathbb{K}$

Notation

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$

Remarque

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$ donc : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est :

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est

Exemples particuliers

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

$\mathrm{Id}_E \in GL(E)$

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

$\mathrm{Id}_E \in GL(E)$

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E
- L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme :

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

$\text{Id}_E \in GL(E)$

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E
- L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme : λId_E

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

$\mathrm{Id}_E \in GL(E)$

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E
- L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme : $\lambda \mathrm{Id}_E$

i.e. l'application
$x \mapsto \lambda x$ de E dans E

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

$\mathrm{Id}_E \in GL(E)$

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E
- L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme : $\lambda \mathrm{Id}_E$

i.e. l'application
$x \mapsto \lambda x$ de E dans E

Exemple 1 : Montrer que f est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

1. $f : (x, y) \mapsto (y, 2x - 3y, x + 2y)$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

$\mathrm{Id}_E \in GL(E)$

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E
- L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme : $\lambda \mathrm{Id}_E$

i.e. l'application
$x \mapsto \lambda x$ de E dans E

Exemple 1 : Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. $D : P \mapsto P'$

Exemples particuliers

$\mathrm{Id}_E \in GL(E)$

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E
- L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme : $\lambda\mathrm{Id}_E$

i.e. l'application
$x \mapsto \lambda x$ de E dans E

Exemple 1 : Montrer que I une forme linéaire de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

3. $$I : f \mapsto \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemples particuliers

$\mathrm{Id}_E \in GL(E)$

- L'application nulle $x \mapsto 0_F$ de E dans F est : linéaire.
- L'identité de E, Id_E : $x \mapsto x$ est un automorphisme de E
- L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme : $\lambda \mathrm{Id}_E$

i.e. l'application $x \mapsto \lambda x$ de E dans E

Exemple 1 : M.q. T est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

4. $T : f \mapsto f'' + 2f' + 3f$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exemple 2 : Les applications suivantes ne sont pas linéaires

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 1+y) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2, y) \end{array}$$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exercice 1

Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \mid h(x) = \lambda x$$

Montrer que h est une homothétie.

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exercice 1

Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \exists \, \lambda \in \mathbb{K} \mid h(x) = \lambda x$$

Montrer que h est une homothétie.

A montrer :
il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\quad h = \lambda \mathrm{Id}_E$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exercice 1

Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \mid h(x) = \lambda x$$

Montrer que h est une homothétie.

A montrer :
il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\quad h = \lambda \mathrm{Id}_E$
i.e. :

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exercice 1

Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \mid h(x) = \lambda x$$

Montrer que h est une homothétie.

A montrer :
il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\quad h = \lambda \mathrm{Id}_E$
i.e. : $\quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad h(x) = \lambda x$

1 Montrer qu'une application est linéaire

Exercice 1

Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \exists\, \lambda_x \in \mathbb{K} \mid h(x) = \lambda_x x$$

Montrer que h est une homothétie.

A montrer :
il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\quad h = \lambda \mathrm{Id}_E$
i.e. : $\quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad h(x) = \lambda x$

dépend de x

Exercice 1

Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \exists\ \lambda_x \in \mathbb{K} \mid h(x) = \lambda_x x$$

Montrer que h est une homothétie.

A montrer :
il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $h = \lambda \mathrm{Id}_E$
i.e. : $\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad h(x) = \lambda x$

2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 1

$\mathscr{L}(E, F)$ est :

Théorème 1

$\mathscr{L}(E,F)$ est : un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 1

$\mathscr{L}(E, F)$ est : un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2

Démontrer ce théorème.

2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 2

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E, F)$ l'est aussi et

2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 2

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E, F)$ l'est aussi et

$$\boxed{\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F}$$

2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 2

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E, F)$ l'est aussi et

$$\boxed{\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F}$$

Théorème 3 : Composée

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ alors :

2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 2

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E,F)$ l'est aussi et

$$\boxed{\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F}$$

Théorème 3 : Composée

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors : $g \circ f$ est linéaire

Théorème 2

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E,F)$ l'est aussi et

$$\boxed{\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F}$$

Théorème 3 : Composée

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors : $g \circ f$ est linéaire

i.e. $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 2

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathscr{L}(E,F)$ l'est aussi et

$$\boxed{\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F}$$

Théorème 3 : Composée

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ alors : $g \circ f$ est linéaire

i.e. $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$

Exercice 3

Démontrer ce théorème.

2 Opérations sur les applications linéaires

Remarque

$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est :

Remarque

$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est : un anneau

Remarque

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est

$(\ \mathscr{L}(E), +, \circ)$ est : un anneau

2 Opérations sur les applications linéaires

Remarque

$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est : un anneau

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre

$(\mathscr{L}(E)\,, +\,, \circ, \cdot)$ est une algèbre

Remarque

$(\ \mathscr{L}(E)\ , +\ , \circ)$ est : un anneau

Conséquence

Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre

Remarque

$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est : un anneau

Conséquence

Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}}$

Remarque

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre

$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est : un anneau

Conséquence

Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}}$
- $\boxed{f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}}$

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une algèbre

Remarque

$(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est : un anneau

Conséquence

Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $f^0 = \mathrm{Id}_E$
- $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$

- $\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}}$
- $\boxed{f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}}$

2 Opérations sur les applications linéaires

Remarque

($\mathscr{L}(E)$, $+$, $\circ$) est : un anneau

$(\mathscr{L}(E)\,,+\,,\circ,\cdot)$ est une algèbre

Conséquence

Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ commutent, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $f^0 = \mathrm{Id}_E$
- $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$

- $\boxed{(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}}$
- $\boxed{f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}}$

Exemple 3 : $f : P \mapsto P - P'$ **et** $D : P \mapsto P'$

Dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$, calculer : $f \circ \sum_{k=0}^{n} D^k$.

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors :

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors : f^{-1} est linéaire

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors : f^{-1} est linéaire

Exercice 4

Démontrer ce résultat.

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors : f^{-1} est linéaire

Exemple 4 : $f \in \mathscr{L}(E)$ **vérifie :** $f^2 - 2f + 3\mathrm{Id}_E = 0$.

Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer f^{-1}.

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors : f^{-1} est linéaire

Remarque

$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est :

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors : f^{-1} est linéaire

Remarque

$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est : un groupe

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors : f^{-1} est linéaire

Remarque

$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est : un groupe $\quad \mathrm{GL}(E) = U(\mathscr{L}(E))$

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors : f^{-1} est linéaire

Remarque

$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est : un groupe $\quad \mathrm{GL}(E) = U(\mathscr{L}(E))$

$f \in \mathrm{GL}(E)$
ssi
f est lin. + f est bij.

Théorème 4 : Réciproque

Si f est un isomorphisme de E sur F, alors : f^{-1} est linéaire

Remarque

$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est : un groupe $\quad \mathrm{GL}(E) \underset{\text{th. 4}}{=} U(\mathscr{L}(E))$

$f \in \mathrm{GL}(E)$
ssi
f est lin. $+$ f est bij.

$f \in U(\mathscr{L}(E))$
ssi
f est lin. $+$ f est bij. $+$ f^{-1} est lin.

II Noyau et image d'une application linéaire

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f :

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est :

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E)$

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x) \ , \ x \in E\}$

Remarque

- $x \in \operatorname{Ker} f$ signifie :
- $y \in \operatorname{Im} f$ signifie :

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

Remarque

- $x \in \operatorname{Ker} f$ signifie : $f(x) = 0_F$
- $y \in \operatorname{Im} f$ signifie :

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

Remarque

- $x \in \operatorname{Ker} f$ signifie : $f(x) = 0_F$
- $y \in \operatorname{Im} f$ signifie : il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

Remarque

- $x \in \operatorname{Ker} f$ signifie : $f(x) = 0_F$
- $y \in \operatorname{Im} f$ signifie : il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$

Théorème 1

-
-

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

Remarque

- $\boxed{x \in \operatorname{Ker} f \text{ signifie : } f(x) = 0_F}$
- $\boxed{y \in \operatorname{Im} f \text{ signifie : il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y}$

Théorème 1

- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-e.v. de E ▪

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

Remarque

- $\boxed{x \in \operatorname{Ker} f \text{ signifie : } f(x) = 0_F}$
- $\boxed{y \in \operatorname{Im} f \text{ signifie : il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y}$

Théorème 1

- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-e.v. de E
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-e.v. de F

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

Remarque

- $\boxed{x \in \operatorname{Ker} f \text{ signifie : } f(x) = 0_F}$
- $\boxed{y \in \operatorname{Im} f \text{ signifie : il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y}$

Théorème 1

- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-e.v. de E
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-e.v. de F

Exercice 1

Démontrer le théorème.

1 Définitions

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

Remarque

- $\boxed{x \in \operatorname{Ker} f \text{ signifie : } f(x) = 0_F}$
- $\boxed{y \in \operatorname{Im} f \text{ signifie : il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y}$

Plus généralement :
$f(E_1)$ est un s.e.v de F
si E_1 est un s.e.v de E

Théorème 1

- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-e.v. de E
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-e.v. de F

Exercice 1

Démontrer le théorème.

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est : $\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(x)\ ,\ x \in E\}$

Remarque

- $x \in \operatorname{Ker} f$ signifie : $f(x) = 0_F$
- $y \in \operatorname{Im} f$ signifie : il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$

Plus généralement : $f^{-1}(F_1)$ est un s.e.v de E si F_1 est un s.e.v de F

Plus généralement : $f(E_1)$ est un s.e.v de F si E_1 est un s.e.v de E

Théorème 1

- $\operatorname{Ker} f$ est un sous-e.v. de E
- $\operatorname{Im} f$ est un sous-e.v. de F

Exercice 1

Démontrer le théorème.

SF 2 : Déterminer Ker *f*

Exemple 1 : $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z\,,\, x - y)$ **de** $\mathbb{R}^3$ **dans** $\mathbb{R}^2$**.**

Trouver une base de Ker f

SF 2 : Déterminer Ker f

Exemple 2 : $D : P \mapsto P'$ **de** $\mathbb{R}[X]$ **dans** $\mathbb{R}[X]$**.**

Déterminer le noyau de l'endomorphisme D

SF 2 : Déterminer Ker *f*

Exemple 3 : $T : f \mapsto f'' + 2f' + 3f$ **de** $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ **dans** $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Déterminer le noyau de l'endomorphisme T

2 Noyau

Remarque

Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \text{ signifie : } f(x) = \quad}$

Remarque

Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \text{ signifie : } f(x) = \lambda x}$

2 Noyau

Remarque

Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ $\boxed{x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \text{ signifie : } f(x) = \lambda x}$

Théorème 2 : Injectivité et noyau

f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

2 Noyau

Remarque

Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ $\boxed{x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \text{ signifie : } f(x) = \lambda x}$

Théorème 2 : Injectivité et noyau

f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Exercice 2

Démontrer cette équivalence.

2 Noyau

Remarque

Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \text{ signifie : } f(x) = \lambda x}$

Théorème 2 : Injectivité et noyau

f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

Exemple 4 : $D : P \mapsto P'$ **de** $\mathbb{R}[X]$ **dans** $\mathbb{R}[X]$**.**

L'endomorphisme D est-il injectif ?

SF 4 : Déterminer $\operatorname{Im} f$ **(option n° 3)**

Exemple 5 : $f : (x,y) \mapsto (x+2y\,,\, 2x+y\,,\, -x+y)$ **de** $\mathbb{R}^2$ **dans** $\mathbb{R}^3$

Déterminer $\operatorname{Im} f$

Théorème 3 : Surjectivité et image

3 Image

Théorème 3 : Surjectivité et image

f est surjective si et seulement si

3 Image

Théorème 3 : Surjectivité et image

f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Théorème 3 : Surjectivité et image

f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Exemple 6 : $f : (x, y) \mapsto (x + 2y\,,\, 2x + y\,,\, -x + y)$ **de** $\mathbb{R}^2$ **dans** $\mathbb{R}^3$

a. f est elle surjective ?

Etudiée à l'exemple 5

Théorème 3 : Surjectivité et image

f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Exemple 6 : $D : P \mapsto P'$ **de** $\mathbb{R}[X]$ **dans** $\mathbb{R}[X]$**.**

b. L'endomorphisme D est-il surjectif ?

Deux résultats à retenir

Exercice 3 : $f \in \mathscr{L}(E,F)$ **et** $g \in \mathscr{L}(F,G)$

1. Démontrer : $\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g}$

4 Exemples de raisonnements abstraits

Deux résultats à retenir

Exercice 3 : $f \in \mathscr{L}(E, F)$ **et** $g \in \mathscr{L}(F, G)$

1. Démontrer : $\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g}$
2. Montrer que : $\boxed{g \circ f = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g.}$

Somme directe de noyaux

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

a) Démontrer : $\quad \mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Id}_E\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\big) = E$

b) Montrer que : $\quad \mathrm{Im}\big(f^2 + f + \mathrm{Id}_E\big) = \mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Id}_E\big)$.

$y \in F$ signifie :

Somme directe de noyaux

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

a) Démontrer : $\quad \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$

b) Montrer que : $\quad \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

$y \in F$ signifie : $f(y) = y$

Somme directe de noyaux

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

a) Démontrer : $\quad \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$

b) Montrer que : $\quad \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

$y \in F$ signifie :
$f(y) = y$

$z \in G$ signifie :

Somme directe de noyaux

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

a) Démontrer : $\quad \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$

b) Montrer que : $\quad \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

$y \in F$ signifie : $f(y) = y$

$z \in G$ signifie : $f(z)^2 + f(z) + z = 0$

Somme directe de noyaux

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$

b) Montrer que : $\mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

$y \in F$ signifie : $f(y) = y$

$z \in G$ signifie : $\cancel{f(z)^2} + f(z) + z = 0$

Somme directe de noyaux

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$

b) Montrer que : $\mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

$y \in F$ signifie :
$f(y) = y$

$z \in G$ signifie :
$f^2(z) + f(z) + z = 0$

Somme directe de noyaux

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

a) Démontrer : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = E$

b) Montrer que : $\mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

III Applications linéaires et bases

Cadre

Cadre

- $\mathscr{B} = (b_i)_{i \in I}$ est une base de E
- Pour $x \in E$ on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$

Cadre

Cadre

possiblement infinie

- $\mathscr{B} = (b_i)_{i \in I}$ est une base de E
- Pour $x \in E$ on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$

Cadre

possiblement infinie

Cadre

- $\mathscr{B} = (b_i)_{i\in I}$ est une base de E
- Pour $x \in E$ on note $(x_i)_{i\in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i\in I} x_i b_i$

seul un nb. fini sont non nuls

Cadre

possiblement infinie

Cadre

- $\mathscr{B} = (b_i)_{i \in I}$ est une base de E
- Pour $x \in E$ on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$

famille presque nulle

seul un nb. fini sont non nuls

1 Déterminer $\operatorname{Im} f$

possiblement infinie

Cadre

- $\mathscr{B} = (b_i)_{i \in I}$ est une base de E
- Pour $x \in E$ on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$

famille presque nulle

seul un nb. fini sont non nuls

f

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'image de f est engendrée par la famille $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$:

possiblement infinie

Cadre

- $\mathscr{B} = (b_i)_{i \in I}$ est une base de E
- Pour $x \in E$ on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$

famille presque nulle

seul un nb. fini sont non nuls

f

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'image de f est engendrée par la famille $(f(b_i))_{i \in I}$: $\quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(b_i))_{i \in I}$

1 Déterminer $\operatorname{Im} f$

possiblement infinie

Cadre

- $\mathscr{B} = (b_i)_{i \in I}$ est une base de E
- Pour $x \in E$ on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$

famille presque nulle

seul un nb. fini sont non nuls

f

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'image de f est engendrée par la famille $\big(f(b_i)\big)_{i \in I}$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(b_i)\big)_{i \in I}$

Exercice 1

Démontrer l'égalité.

1 Déterminer $\operatorname{Im} f$

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. L'image de f est engendrée par la famille $\big(f(b_i)\big)_{i\in I}$: $\quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(b_i)\big)_{i\in I}$

SF 4 : Déterminer $\operatorname{Im} f$ (option n° 1)

Exemple 1 : $f : (x,y) \mapsto (x+2y\,,\, 2x+y\,,\, -x+y)$ **de** $\mathbb{R}^2$ **dans** $\mathbb{R}^3$

Déterminer l'image de l'application linéaire f

1 Déterminer $\operatorname{Im} f$

Théorème 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'image de f est engendrée par la famille $\big(f(b_i)\big)_{i \in I}$: $\quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(b_i)\big)_{i \in I}$

SF 4 : Déterminer $\operatorname{Im} f$ (option n° 1)

Exemple 2 : $D : P \mapsto P'$ **de** $\mathbb{K}_n[X]$ **dans** $\mathbb{K}_n[X]$

Déterminer l'image de l'endomorphisme D.

2 Prouver l'injectivité/la surjectivité/ la bijectivité

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

i) f est injective si et seulement si :

ii) f est surjective si et seulement si :

iii) f est bijective si et seulement si :

2 Prouver l'injectivité/la surjectivité/ la bijectivité

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

i) f est injective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est libre

ii) f est surjective si et seulement si :

iii) f est bijective si et seulement si :

2 Prouver l'injectivité/la surjectivité/ la bijectivité

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

i) f est injective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i\in I}$ est libre

ii) f est surjective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i\in I}$ est génératrice de F

iii) f est bijective si et seulement si :

2 Prouver l'injectivité/la surjectivité/ la bijectivité

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

i) f est injective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est libre

ii) f est surjective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est génératrice de F

iii) f est bijective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est une base de F

2 Prouver l'injectivité/la surjectivité/ la bijectivité

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

i) f est injective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i\in I}$ est libre

ii) f est surjective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i\in I}$ est génératrice de F

iii) f est bijective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i\in I}$ est une base de F

Exercice 2

Démontrer le théorème.

2 Prouver l'injectivité/la surjectivité/ la bijectivité

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

i) f est injective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est libre

ii) f est surjective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est génératrice de F

iii) f est bijective si et seulement si : $\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$ est une base de F

SF 6 : Montrer que f est un isomorphisme de E sur F

On peut montrer que f transforme une base de E en une base de F

Exemple 3 : $f : P \mapsto P - P'$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

3 Détermination par l'image d'une base

Définition 1

Soit $j \in I$.
La j^e *forme coordonnée* de E est :

Elle vérifie :
-
-

3 Détermination par l'image d'une base

Définition 1

Soit $j \in I$.

La j^e *forme coordonnée* de E est : $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

Elle vérifie :

-
-

3 Détermination par l'image d'une base

Définition 1

Soit $j \in I$.

La j^{e} *forme coordonnée* de E est : $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & \underbrace{x_j}_{j^{\text{e}} \text{ coordonnée de } x} \end{array}$

Elle vérifie :
-
-

3 Détermination par l'image d'une base

Définition 1

j^{e} coordonnée de x

Soit $j \in I$.
La j^{e} *forme coordonnée* de E est :

$$\varphi_j : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$$

Elle vérifie :

- $\varphi_j(b_j) =$
-

Définition 1

j^{e} coordonnée de x

Soit $j \in I$.
La j^{e} *forme coordonnée* de E est : $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

Elle vérifie : ▪ $\varphi_j(b_j) = 1$ ▪

Définition 1

Soit $j \in I$.

La j^e *forme coordonnée* de E est :

$$\varphi_j : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & \underbrace{x_j}_{j^e \text{ coordonnée de } x} \end{array}$$

Elle vérifie :

- $\varphi_j(b_j) = 1$
- $\varphi_j(b_i) = 0$ pour $i \neq j$

Définition 1

j^e coordonnée de x

Soit $j \in I$.
La j^e *forme coordonnée* de E est : $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

Elle vérifie : ▪ $\varphi_j(b_j) = 1$ ▪ $\varphi_j(b_i) = 0$ pour $i \neq j$

Théorème 3 : « Interpolation linéaire »

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que :

Définition 1

Soit $j \in I$.
La j^{e} *forme coordonnée* de E est :

$$\varphi_j : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & \underbrace{x_j}_{j^{\text{e}} \text{ coordonnée de } x} \end{array}$$

Elle vérifie :
- $\varphi_j(b_j) = 1$
- $\varphi_j(b_i) = 0$ pour $i \neq j$

Théorème 3 : « Interpolation linéaire »

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que : $\forall j \in I, \quad f(b_j) = u_j$

Définition 1

j^{e} coordonnée de x

Soit $j \in I$.
La j^{e} *forme coordonnée* de E est : $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

Elle vérifie : ▪ $\varphi_j(b_j) = 1$ ▪ $\varphi_j(b_i) = 0$ pour $i \neq j$

Théorème 3 : « Interpolation linéaire »

Pour définir $f \in \mathscr{L}(E, F)$ il suffit de définir les $f(b_j)$

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que : $\forall j \in I, \quad f(b_j) = u_j$

3 Détermination par l'image d'une base

Définition 1

j^e coordonnée de x

Soit $j \in I$.

La j^e *forme coordonnée* de E est : $\varphi_j : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i \in I} x_i b_i & \longmapsto & x_j \end{array}$

Elle vérifie : ▪ $\varphi_j(b_j) = 1$ ▪ $\varphi_j(b_i) = 0$ pour $i \neq j$

Théorème 3 : « Interpolation linéaire »

Pour définir $f \in \mathscr{L}(E, F)$ il suffit de définir les $f(b_j)$

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que : $\forall j \in I, \quad f(b_j) = u_j$

Exercice 3

Démontrer l'existence et l'unicité par analyse-synthèse.

3 Détermination par l'image d'une base

Théorème 4 : « Interpolation linéaire »

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : $\forall j \in I, \quad f(b_j) = u_j$

Pour définir $f \in \mathscr{L}(E,F)$
il suffit de définir les $f(b_j)$

Exemple 4

On définit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ par

$$f(1,0) = (1,0,1) \quad \text{et} \quad f(0,1) = (1,1,2)$$

Théorème 4 : « Interpolation linéaire »

Pour définir $f \in \mathscr{L}(E,F)$ il suffit de définir les $f(b_j)$

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : $\forall j \in I, \quad f(b_j) = u_j$

Exemple 4

On définit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ par

$$f(1,0) = (1,0,1) \quad \text{et} \quad f(0,1) = (1,1,2)$$

a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de $f(x,y)$.

3 Détermination par l'image d'une base

Théorème 4 : « Interpolation linéaire »

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que : $\forall j \in I, \quad f(b_j) = u_j$

Pour définir $f \in \mathscr{L}(E,F)$ il suffit de définir les $f(b_j)$

Exemple 4

On définit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ par

$$f(1,0) = (1,0,1) \quad \text{et} \quad f(0,1) = (1,1,2)$$

a) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'expression de $f(x,y)$.

b) Y-a-t-il un lien entre f et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?

3 Détermination par l'image d'une base

Théorème 5 : Détermination sur une somme directe

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

3 Détermination par l'image d'une base

$\forall z \in E_2, \quad f(z) = f_2(z)$

$\forall y \in E_1, \quad f(y) = f_1(y)$

Théorème 5 : Détermination sur une somme directe

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que ▪ ▪

$\forall z \in E_2, \quad f(z) = f_2(z)$

$\forall y \in E_1, \quad f(y) = f_1(y)$

Théorème 5 : Détermination sur une somme directe

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

- $f_{|E_1} = f_1$
- $f_{|E_2} = f_2$

4 Espaces de dimension finie isomorphes

$\forall z \in E_2, \quad f(z) = f_2(z)$

$\forall y \in E_1, \quad f(y) = f_1(y)$

Théorème 6 : Détermination sur une somme directe

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que
- $f_{|E_1} = f_1$
- $f_{|E_2} = f_2$

Théorème 7

On suppose E de dimension finie.
F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie et :

$\forall z \in E_2, \quad f(z) = f_2(z)$

$\forall y \in E_1, \quad f(y) = f_1(y)$

Théorème 6 : Détermination sur une somme directe

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soient $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.
Il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

- $f_{|E_1} = f_1$
- $f_{|E_2} = f_2$

Théorème 7

On suppose E de dimension finie.
F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie et : $\dim E = \dim F$

4 Espaces de dimension finie isomorphes

$=$ il existe un isomorphisme de E sur F

Théorème 6

On suppose E de dimension finie.
F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie et : $\dim E = \dim F$

Exercice 4

Démontrer l'équivalence du théorème.

4 Espaces de dimension finie isomorphes

$=$ il existe un isomorphisme de E sur F

Théorème 6

On suppose E de dimension finie.
F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie et : $\dim E = \dim F$

Exemple 5 : $F = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \right\}$

Prouver que F est un plan vectoriel.

IV Rang d'une application linéaire

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
En ce cas on pose :

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
En ce cas on pose : $\operatorname{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E, F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.

En ce cas on pose : $\operatorname{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$

Remarque

Si E est muni d'une base $(b_1, \ldots, b_n)$: $\operatorname{Im} f =$

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
En ce cas on pose : $\operatorname{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$

Remarque

Si E est muni d'une base $(b_1, \ldots, b_n)$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(b_1), \ldots, f(b_n))$

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie.
En ce cas on pose : $\mathrm{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\mathrm{Im}\, f)$

f est de rang fini

Remarque

Si E est muni d'une base $(b_1, \dots, b_n)$: $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(b_1), \dots, f(b_n))$

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.

En ce cas on pose : $\operatorname{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$

f est de rang fini

Remarque

Si E est muni d'une base $(b_1, \ldots, b_n)$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(b_1), \ldots, f(b_n))$

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Vect}(f(b_1), \ldots, f(b_n))$$

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
En ce cas on pose : $\operatorname{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$

f est de rang fini

Remarque

Si E est muni d'une base $(b_1, ..., b_n)$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(b_1), ..., f(b_n))$

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Vect}(f(b_1), ..., f(b_n)) = \operatorname{rg}(f(b_1), \dots, f(b_n))$$

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie.
En ce cas on pose : $\mathrm{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\mathrm{Im}\, f)$

f est de rang fini

Remarque

Si E est muni d'une base $(b_1, ..., b_n)$: $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(b_1), ..., f(b_n))$

$$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Vect}(f(b_1), ..., f(b_n)) = \mathrm{rg}(f(b_1), \ldots, f(b_n))$$

rang de l'application

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
En ce cas on pose : $\operatorname{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$

f est de rang fini

Remarque

Si E est muni d'une base $(b_1, \dots, b_n)$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(b_1), \dots, f(b_n))$

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Vect}(f(b_1), \dots, f(b_n)) = \operatorname{rg}(f(b_1), \dots, f(b_n))$$

rang de l'application

rang de la famille

1 Définition du rang

$f \in \mathscr{L}(E,F)$

Définition 1

f est dite de *rang fini* si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
En ce cas on pose : $\operatorname{rg}(f) \underset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$

f est de rang fini

Remarque

Si E est muni d'une base $(b_1, ..., b_n)$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(b_1), ..., f(b_n))$

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Vect}(f(b_1), ..., f(b_n)) = \operatorname{rg}(f(b_1), \dots, f(b_n))$$

rang de l'application

rang de la famille

Exemple 1 : Ex. 72.1, banque INP

On suppose que : $f(b_1) = \cdots = f(b_n) = v$ où $v \in F$ est fixé.
Que vaut $\operatorname{rg}(f)$?

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.
Alors :

2 Théorème du rang

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.

Alors : $\begin{array}{rccl} \varphi & : & S & \longrightarrow \operatorname{Im} f \\ & & x & \longmapsto f(x) \end{array}$ est un isomorphisme

2 Théorème du rang

isomorphisme *induit* par f
de S sur $\operatorname{Im} f$

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.

Alors : $\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme

2 Théorème du rang

isomorphisme *induit* par f de S sur $\operatorname{Im} f$

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.

Alors : $\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme

Exercice 1

Démontrer le théorème

isomorphisme *induit* par f de S sur $\operatorname{Im} f$

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.

Alors : $\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme

Exercice 1

Démontrer le théorème

Théorème 2 : Théorème du rang

Si E est de dimension finie :

2 Théorème du rang

isomorphisme *induit* par f de S sur $\operatorname{Im} f$

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.

Alors : $\quad \begin{array}{rccl} \varphi : & S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ $\quad$ est un isomorphisme

Exercice 1

Démontrer le théorème

Théorème 2 : Théorème du rang

Si E est de dimension finie : $\quad \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$

isomorphisme *induit* par f de S sur $\operatorname{Im} f$

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.
Alors : $\begin{array}{rccl} \varphi & : & S & \longrightarrow \operatorname{Im} f \\ & & x & \longmapsto f(x) \end{array}$ est un isomorphisme

Exercice 1

Démontrer le théorème

Théorème 2 : Théorème du rang

Si E est de dimension finie : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$

Exercice 2

Déduire ce théorème du précédent.

isomorphisme *induit* par f de S sur $\operatorname{Im} f$

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.

Alors : $\varphi \; : \; \begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme

Exercice 1

Démontrer le théorème

Théorème 2 : Théorème du rang

Si E est de dimension finie : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$

Exemple 2 : E est de dimension finie n

Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$. Montrer : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq n$

2 Théorème du rang

isomorphisme *induit* par f de S sur $\operatorname{Im} f$

Théorème 1 : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire S dans E.
Alors : $\quad \varphi : \begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad$ est un isomorphisme

Exercice 1

Démontrer le théorème

Théorème 2 : Théorème du rang

Si E est de dimension finie : $\quad \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$

Exemple 2 : E est de dimension finie n

$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$

Soit $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$. Montrer : $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq n$

2 Théorème du rang

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.

Il y a équivalence entre :

i) ii) iii)

2 Théorème du rang

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.

Il y a équivalence entre :

i) f est injective ii) iii)

2 Théorème du rang

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.
Il y a équivalence entre :
i) f est injective   ii) f est surjective   iii)

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.

Il y a équivalence entre :

i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

2 Théorème du rang

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.
Il y a équivalence entre :
i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

Exercice 3

Démontrer l'équivalence entre *i)* et *ii)* à l'aide de la formule du rang.

S'applique dans le cas
d'un endomorphisme en dimension finie

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.
Il y a équivalence entre :
i) f est injective   ii) f est surjective   iii) f est bijective

Exercice 3

Démontrer l'équivalence entre *i)* et *ii)* à l'aide de la formule du rang.

S'applique dans le cas
d'un endomorphisme en dimension finie

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.
Il y a équivalence entre :
i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

SF 6 : Montrer que f est un isomorphisme

Exemple 3

Montrer que

$$f : (x, y, z) \mapsto (y + z, z + x, x + y)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

S'applique dans le cas
d'un endomorphisme en dimension finie

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.
Il y a équivalence entre :
i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

SF 6 : Montrer que f est un isomorphisme

Exemple 4 : ♥ cf. Ex. 87.1 et Ex. 90.1, banque INP

Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$

est un isomorphisme

S'applique dans le cas
d'un endomorphisme en dimension finie

Théorème 3 : « Miracle de la dimension finie »

On suppose E et F de même dimension finie.
Il y a équivalence entre :
i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

SF 6 : Montrer que f est un isomorphisme

Exemple 5

Soit $T \in GL_n(\mathbb{K})$, triangulaire supérieure.
Montrer que T^{-1} est triangulaire supérieure.

3 Deux compléments

Rappel

$f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi il existe g tel que :

3 Deux compléments

Rappel

$f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi il existe g tel que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

3 Deux compléments

Rappel

$f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi il existe g tel que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

Théorème 4

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :

- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff$
- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff$

3 Deux compléments

Rappel

$f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi il existe g tel que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad$ et $\quad f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

Théorème 4

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :

- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = \mathrm{Id}_E$
- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff$

3 Deux compléments

Rappel

$f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi il existe g tel que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

Théorème 4

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :

- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = \mathrm{Id}_E$
- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = \mathrm{Id}_E$

3 Deux compléments

Rappel

$f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi il existe g tel que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

Théorème 4

f est inversible à gauche

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :

- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = \mathrm{Id}_E$
- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = \mathrm{Id}_E$

3 Deux compléments

Rappel

$f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi il existe g tel que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

Théorème 4

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :

- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = \mathrm{Id}_E$

f est inversible à gauche

- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = \mathrm{Id}_E$

f est inversible à droite

3 Deux compléments

Rappel

$f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi il existe g tel que : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

Théorème 4

f est inversible à gauche

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors :

- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = \mathrm{Id}_E$
- $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \exists g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = \mathrm{Id}_E$

f est inversible à droite

Exercice 4

Démontrer le premier point.

3 Deux compléments

Théorème 5 : Rang d'une composée

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.

$v \circ u$ est de rang fini et :

3 Deux compléments

Théorème 5 : Rang d'une composée

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.

$v \circ u$ est de rang fini et : $\boxed{\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))}$

3 Deux compléments

Théorème 5 : Rang d'une composée

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.

$v \circ u$ est de rang fini et : $\boxed{\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))}$

Exercice 5

Montrer : a) $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(v)$ b) $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(u)$

3 Deux compléments

Théorème 5 : Rang d'une composée

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.
$v \circ u$ est de rang fini et : $\boxed{\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))}$

Exercice 6 : E est de dimension finie n.

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer : $\operatorname{rg}(v \circ u) \geq \operatorname{rg}(v) + \operatorname{rg}(u) - n$

3 Deux compléments

Théorème 5 : Rang d'une composée

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.
$v \circ u$ est de rang fini et : $\boxed{\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))}$

Théorème 6 : Composer par un iso. ne modifie pas le rang

On suppose E, F et G de dimension finie.
Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

- Si f est un isomorphisme : $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g)$
- Si g est un isomorphisme : $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(f)$

3 Deux compléments

Théorème 5 : Rang d'une composée

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ de rang fini.
$v \circ u$ est de rang fini et : $\boxed{\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))}$

Théorème 6 : Composer par un iso. ne modifie pas le rang

On suppose E, F et G de dimension finie.
Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

- Si f est un isomorphisme : $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$
- Si g est un isomorphisme : $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$

Exercice 7

Démontrer le premier point du théorème.