Intégration

Chapitre 22

I Définition de l'intégrale

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Vocabulaire : *subdivision* de $[a\,,b]$

famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de réels telle que : $\quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Vocabulaire : *subdivision* de $[a\,,b]$

famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de réels telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

dite *adaptée à f*

Définition 1

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que :

Vocabulaire : *subdivision* de $[a\,,b]$

famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de réels telle que : $\quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$

dite *adaptée à f*

Définition 1

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que : f est constante sur $]x_i\,,x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Vocabulaire : *subdivision* de $[a\,,b]$

famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de réels telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

dite *adaptée à f*

Définition 1

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que : f est constante sur $]x_i\,,x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$

Définition 2

Pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i\,,x_{i+1}[$.
On définit l'*intégrale* de f sur $[a\,,b]$ par :

$$\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=}$$

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Vocabulaire : *subdivision* de $[a\,,b]$

famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de réels telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

dite *adaptée à f*

Définition 1

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que : f est constante sur $]x_i\,,x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$

Définition 2

Pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i\,,x_{i+1}[$.
On définit l'*intégrale* de f sur $[a\,,b]$ par :

$$\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)y_i$$

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Vocabulaire : *subdivision* de $[a\,,b]$

famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de réels telle que : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

dite *adaptée à f*

Définition 1

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que : f est constante sur $]x_i\,,x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$

Définition 2

Pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i\,,x_{i+1}[$. On définit l'*intégrale* de f sur $[a\,,b]$ par :

$$\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$$

Aire d'un rectangle

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2

Pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i\,,x_{i+1}[$.
On définit l'*intégrale* de f sur $[a\,,b]$ par :

$$\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)y_i$$

Exercice 1

Montrer que la quantité : $\quad S(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)y_i \quad$ ne dépend pas de la subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ adaptée à f

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2

Pour tout $i \in [\![0\,, n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i\,, x_{i+1}[$.
On définit l'*intégrale* de f sur $[a\,, b]$ par :

$$\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$$

Exercice 2

Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{K}$ en escalier. Montrer que :

$$\left| \int_{[a\,,b]} f \right| \leq (b-a) \, \|f\|_\infty$$

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2

Pour tout $i \in [\![0\,, n-1]\!]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i\,, x_{i+1}[$.
On définit l'*intégrale* de f sur $[a\,, b]$ par :

$$\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$$

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\int_0^{n+1} \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t$.

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.*

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $$\int_{[a\,,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a\,,b]} f + \mu \int_{[a\,,b]} g.$$

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $$\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.*
   - *Croissance.*

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.*

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$
3. *Relation de Chasles.*

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$
3. *Relation de Chasles.* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$
3. *Relation de Chasles.* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$
4. Si f et g sont « presque égales » :

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$

2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$

3. *Relation de Chasles.* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

égales sauf en un nombre fini de points

4. Si f et g sont « presque égales » :

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$

2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$

égales sauf en un nombre fini de points

3. *Relation de Chasles.* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

4. Si f et g sont « presque égales » : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$

égales sauf en un nombre fini de points

3. *Relation de Chasles.* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$
4. Si f et g sont « presque égales » : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$
5. *Lien avec* Re *et* Im.

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g.$
3. *Relation de Chasles.* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$

égales sauf en un nombre fini de points

4. Si f et g sont « presque égales » : $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$
5. *Lien avec* Re *et* Im. $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$

1 Intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 1 : Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. *Linéarité.* $\displaystyle\int_{[a\,,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a\,,b]} f + \mu \int_{[a\,,b]} g.$
2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
   - *Positivité.* Si $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{[a\,,b]} f \geq 0.$
   - *Croissance.* Si $f \leq g$: $\displaystyle\int_{[a\,,b]} f \leq \int_{[a\,,b]} g.$

égales sauf en un nombre fini de points

3. *Relation de Chasles.* $\displaystyle\int_{[a\,,b]} f = \int_{[a\,,c]} f + \int_{[c\,,b]} f$
4. Si f et g sont « presque égales » : $\displaystyle\int_{[a\,,b]} f = \int_{[a\,,b]} g$
5. *Lien avec* Re *et* Im. $\displaystyle\int_{[a\,,b]} f = \int_{[a\,,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a\,,b]} \mathrm{Im}(f)$

Exercice 3

Etablir la propriété de linéarité.

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

dite *adaptée à f*

Définition 3

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$:

dite *adaptée à f*

Définition 3

$f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$.

dite *adaptée à f*

Définition 3

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$:

- f est continue sur $]x_i\,,x_{i+1}[$.
- $\lim\limits_{x_i^+} f$ et $\lim\limits_{x_{i+1}^-} f$ existent et sont finies.

dite *adaptée à f*

ensemble noté $\mathscr{CM}([a\,,b],\mathbb{K})$

Définition 3

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$:

- f est continue sur $]x_i\,,x_{i+1}[$.
- $\lim\limits_{x_i^+} f$ et $\lim\limits_{x_{i+1}^-} f$ existent et sont finies.

dite *adaptée à f*

ensemble noté $\mathscr{CM}([a\,,b],\mathbb{K})$

Définition 3

$f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0\,,n-1]\!]$:

- f est continue sur $]x_i\,,x_{i+1}[$.
- $\lim\limits_{x_i^+} f$ et $\lim\limits_{x_{i+1}^-} f$ existent et sont finies.

Exercice 4

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$, continue par morceaux.
Montrer que f est bornée sur $[a\,,b]$.

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Admis provisoirement. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Admis provisoirement. Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f *i.e.* : $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ▸ Figure

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Admis provisoirement. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f *i.e.* : $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ Figure

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par :

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Admis provisoirement. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f *i.e.* : $\quad \|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ▸ Figure

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par : $\quad \displaystyle\int_{[a,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Admis provisoirement. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f *i.e.* : $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ▸ Figure

Exercice 5

Montrer que la suite $\left(\int_{[a,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par : $$\int_{[a,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$$

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Admis provisoirement. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f *i.e.* : $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ▸ Figure

Exercice 5

Montrer que la suite $\left(\int_{[a\,,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par : $\displaystyle\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a\,,b]} \varphi_n$

pour n'importe quelle suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Admis provisoirement. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f *i.e.* : $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ▸ Figure

Exercice 5

Montrer que la suite $\left(\int_{[a\,,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite ne dépend pas du choix de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par : $\displaystyle\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a\,,b]} \varphi_n$

pour n'importe quelle suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par : $$\int_{[a,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$$ pour n'importe quelle suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque

Si f est en escalier, les deux définitions de $\int_{[a,b]} f$ coïncident .

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$ pour n'importe quelle suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque

Si f est en escalier, les deux définitions de $\int_{[a,b]} f$ coïncident .

On peut prendre $\varphi_n = f$

2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par : $\displaystyle\int_{[a,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$ pour n'importe quelle suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque

Si f est en escalier, les deux définitions de $\int_{[a,b]} f$ coïncident .

On peut prendre $\varphi_n = f$

Conséquence

Le théorème 1 reste vrai pour les fonctions continues par morceaux

Définition 4

On définit l'*intégrale de f* par : $$\int_{[a\,,b]} f \underset{\text{déf.}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a\,,b]} \varphi_n$$ pour n'importe quelle suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\|f-\varphi_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque

Si f est en escalier, les deux définitions de $\int_{[a\,,b]} f$ coïncident .

On peut prendre $\varphi_n = f$

Conséquence

Le théorème 1 reste vrai pour les fonctions continues par morceaux

Exercice 6

Démontrer la linéarité de l'intégrale dans $\mathscr{CM}([a\,,b],\mathbb{K})$

données sans ordre

Notation définitive

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b],\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in [a\,,b]$:

données sans ordre

Notation définitive

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b],\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in [a\,,b]$:

- si $\alpha < \beta$: $$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} \int_{[\alpha\,,\beta]} f$$

aussi notée $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$

donnés sans ordre

Notation définitive

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b], \mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in [a\,,b]$:

- si $\alpha < \beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} \int_{[\alpha\,,\beta]} f$

aussi notée $\int_\alpha^\beta f$

donnés sans ordre

Notation définitive

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b],\mathbb{K})$ et $\alpha,\beta \in [a\,,b]$:

- si $\alpha < \beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} \int_{[\alpha\,,\beta]} f$
- si $\alpha > \beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} -\int_{[\beta\,,\alpha]} f$

aussi notée $\int_\alpha^\beta f$

donnés sans ordre

Notation définitive

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b], \mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in [a\,,b]$:

- si $\alpha < \beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} \int_{[\alpha\,,\beta]} f$
- si $\alpha > \beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} -\int_{[\beta\,,\alpha]} f$
- si $\alpha = \beta$: $\displaystyle\int_\alpha^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} 0$

II Propriétés de l’intégrale

1 Justifier que $\int_a^b f$ est bien définie

En pratique

On justifie que f est continue par morceaux sur $[a\,,b]$

Exemple 1

Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie

1 Justifier que $\int_a^b f$ est bien définie

En pratique

On justifie que f est continue par morceaux sur $[a\,,b]$

Exemple 1

Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie

Exemple 2

Justifier que l'intégrale I est bien définie :

a) $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

1 Justifier que $\int_a^b f$ est bien définie

En pratique

On justifie que f est continue par morceaux sur $[a\,,b]$

Exemple 1

Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie

Exemple 2

Justifier que l'intégrale I est bien définie :

a) $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$ b) $\displaystyle I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

SF 5 : pour majorer/minorer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On encadre « l'intérieur » : $\forall t \in [a, b], \quad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$

2 Majorer/minorer des intégrales

SF 5 : pour majorer/minorer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On encadre « l'intérieur » : $\quad \forall t \in [a\,,b], \quad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$
2. Par croissance de l'intégrale : $$\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h\ .$$

2 Majorer/minorer des intégrales

SF 5 : pour majorer/minorer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On encadre « l'intérieur » : $\forall t \in [a\,,b], \quad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$
2. Par croissance de l'intégrale : $$\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h\,.$$

☢ $a \leq b$ est indispensable ☢

SF 5 : pour majorer/minorer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On encadre « l'intérieur » : $\forall t \in [a\,,b], \quad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$
2. Par croissance de l'intégrale : $$\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h\,.$$

$a \leq b$ est indispensable

Exemple 3 : Etudier la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+e^t}\,\mathrm{d}t.$

SF 5 : pour majorer/minorer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On encadre « l'intérieur » : $\forall t \in [a\,,b], \quad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$
2. Par croissance de l'intégrale : $$\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h\,.$$

☢ $a \leq b$ est indispensable ☢

Théorème 1 : Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathscr{CM}([a\,,b], \mathbb{K})$:

2 Majorer/minorer des intégrales

SF 5 : pour majorer/minorer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On encadre « l'intérieur » : $\forall t \in [a\,,b],\quad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$
2. Par croissance de l'intégrale : $$\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h\,.$$

$a \leq b$ est indispensable

Théorème 1 : Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathscr{CM}([a\,,b],\mathbb{K})$: $$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

2 Majorer/minorer des intégrales

SF 5 : pour majorer/minorer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

1. On encadre « l'intérieur » : $\forall t \in [a\,,b],\quad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$
2. Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h\ .$

☢ $a \leq b$ est indispensable ☢

Théorème 1 : Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b],\mathbb{K})$: $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Exercice 1

Démontrer cette inégalité.

Théorème 1 : Inégalité triangulaire

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([a\,,b],\mathbb{K})$: $$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Exemple 4 : $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t^n}{n!}\,\cos t\,\mathrm{d}t$

Montrer que : $$|I_n| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) ii) iii)

Alors :

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i)

ii)

iii)

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si :

i)

ii)

iii) $\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a, b]$.

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) f continue sur $[a\,,b]$ ii) iii) $\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) f continue sur $[a\,,b]$ ii) $f \geq 0$ sur $[a\,,b]$ iii) $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) f continue sur $[a\,,b]$ ii) $f \geq 0$ sur $[a\,,b]$ iii) $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

Conséquence

Si $f \geq 0$ et si f est continue et n'est pas la fonction nulle :

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) f continue sur $[a\,,b]$ ii) $f \geq 0$ sur $[a\,,b]$ iii) $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

Conséquence

Si $f \geq 0$ et si f est continue et n'est pas la fonction nulle : $\displaystyle\int_a^b f > 0$

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) f continue sur $[a\,,b]$ ii) $f \geq 0$ sur $[a\,,b]$ iii) $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

☢ conclusion fausse si
i) ou ii) n'est pas vérifiée. ☢

Conséquence

Si $f \geq 0$ et si f est continue et n'est pas la fonction nulle : $\displaystyle\int_a^b f > 0$

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) f continue sur $[a\,,b]$ ii) $f \geq 0$ sur $[a\,,b]$ iii) $\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

☢ conclusion fausse si $i)$ ou $ii)$ n'est pas vérifiée. ☢

Conséquence

Si $f \geq 0$ et si f est continue et n'est pas la fonction nulle : $\int_a^b f > 0$

Exercice 2

Démontrer le théorème

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) f continue sur $[a\,,b]$ ii) $f \geq 0$ sur $[a\,,b]$ iii) $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

Conséquence

Si $f \geq 0$ et si f est continue et n'est pas la fonction nulle : $\displaystyle\int_a^b f > 0$

Exercice 3

Soit $f \in \mathscr{CM}([a\,,b], \mathbb{R}_+)$ et $x_0 \in \,]a\,,b[$.

Montrer que si $f(x_0) > 0$ et f est continue en x_0 alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$

3 Déduire des information sur f à partir de son intégrale

Théorème 2

On suppose que $a < b$. Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. Si :

i) f continue sur $[a\,,b]$ ii) $f \geq 0$ sur $[a\,,b]$ iii) $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors : $f = 0$ sur $[a\,,b]$.

Exemple 5

Soit $f : [0\,,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que : $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2 = 1.$

Montrer : $\forall t \in [0\,,1], \quad f(t) = 1.$

4 Application au calcul de limites d'intégrales

Objectif

Etudier des limites du type : $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$

4 Application au calcul de limites d'intégrales

Objectif

Etudier des limites du type : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{?}{=} \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

4 Application au calcul de limites d'intégrales

Objectif

Etudier des limites du type : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

4 Application au calcul de limites d'intégrales

Objectif

Etudier des limites du type : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 6 : Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

a) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) e^{-nt}\,\mathrm{d}t$

b) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

4 Application au calcul de limites d'intégrales

Objectif

Etudier des limites du type : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 7

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}([0\,,1], \mathbb{R})$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

4 Application au calcul de limites d'intégrales

Objectif

Etudier des limites du type : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 8 : $H : x \mapsto e^{-x} \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

Etudier la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de H.

4 Application au calcul de limites d'intégrales

Objectif

Etudier des limites du type : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple 9 : Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a\,,b],\mathbb{R})$. Montrer : $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

III Intégrales et primitives

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exercice 1

Démontrer le théorème

1 Le théorème fondamental de l'analyse

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} =$$

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exercice 1

Démontrer le théorème

1 Le théorème fondamental de l'analyse

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exercice 1

Démontrer le théorème

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

$$f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 1

Démontrer le théorème

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Conséquences (rappels)

- Toute fonction continue sur I possède des primitives

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Conséquences (rappels)

- Toute fonction continue sur I possède des primitives
- On peut calculer une intégrale au moyen d'une primitive

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Conséquences (rappels)

- Toute fonction continue sur I possède des primitives
- On peut calculer une intégrale au moyen d'une primitive
- Formule d'intégration par parties

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Conséquences (rappels)

- Toute fonction continue sur I possède des primitives
- On peut calculer une intégrale au moyen d'une primitive
- Formule d'intégration par parties
- Formule du changement de variable.

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exemple 1 : Figure

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et T-périodique.
Montrer :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exemple 2

Soit f une fonction continue sur $[-a\,,a]$.
Montrer que si f est paire :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Si f est impaire

Exemple 2

Soit f une fonction continue sur $[-a\,,a]$.
Montrer que si f est paire :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

1 Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Si f est impaire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Exemple 2

Soit f une fonction continue sur $[-a\,,a]$.
Montrer que si f est paire :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et $a \in I$.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $\Phi' = f$
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Exemple 3

Soit f une fonction continue sur $[a\,,b]$. Montrer que :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2 Etude d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\quad \varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ est dérivable sur J et :

2 Etude d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\quad \varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = v'(x) f\left(v(x)\right) - u'(x) f\left(u(x)\right)$$

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\quad \varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = v'(x) f\big(v(x)\big) - u'(x) f\big(u(x)\big)$$

Exercice 2

Démontrer la dérivabilité de φ et établir l'expression de φ'.

2 Etude d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = v'(x) f\left(v(x)\right) - u'(x) f\left(u(x)\right)$$

Exemple 4

Soit $x > 0$. Calculer : $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t \operatorname{Arctan} t}{t^4 + 1}\,\mathrm{d}t$

2 Etude d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$$

Exemple 5 : $H : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1\,, +\infty[$ et calculer H'

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.
La fonction $\quad \varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = v'(x) f\left(v(x)\right) - u'(x) f\left(u(x)\right)$$

Exemple 5 : $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

2. On note u la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
   Montrer que u est prolongeable par continuité en 1.

2 Etude d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Exemple 5 : $H : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

$$u : x \mapsto \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$$

3. A l'aide de la fonction u, calculer la limite en 1^+ de la fonction H

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = v'(x)f\left(v(x)\right) - u'(x)f\left(u(x)\right)$$

Exemple 5 : $H : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

4. La fonction H est-elle prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,,+\infty[$?

2 Etude d'une fonction définie par une intégrale

Théorème 2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.

La fonction $\quad \varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = v'(x) f\left(v(x)\right) - u'(x) f\left(u(x)\right)$$

Exemple 6 : $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Dans chaque cas, montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer φ' :

a) $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(x+t)\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ b) $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(x-t)\cos t\,\mathrm{d}t$