Dimension

Chapitre 21

Cadre

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Théorie de la dimension

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie si :

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie si : il possède une famille génératrice finie.

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie si : il possède une famille génératrice finie.

Exemple 1 : Sont-ils de dimension finie ?

a) $\mathbb{R}^2$ b) $\mathbb{K}^n$ c) $\mathbb{K}_n[X]$ d) $\mathbb{K}[X]$

1 Théorème de la base incomplète

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

1 Théorème de la base incomplète

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

Théorème 1 : Les libres ont moins d'elts que les génératrices

Toute famille libre de E possède au plus n éléments.

1 Théorème de la base incomplète

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

Théorème 1 : Les libres ont moins d'elts que les génératrices

Toute famille libre de E possède au plus n éléments.

Exercice 1

Montrer que dans un $\mathbb{K}$-e.v. engendré par n vecteurs, toute famille à $n+1$ éléments est liée.

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

Cadre

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E est complétable en une base de E .

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

(à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$)

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E est complétable en une base de E .

Exercice 2 : Preuve par récurrence descendante sur $p \in [\![0\,, n]\!]$

$\mathscr{H}_p$: « Toute famille libre $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_p)$ à p éléments est complétable en une base de E »

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

(à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$)

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E est complétable en une base de E .

Exercice 2 : Preuve par récurrence descendante sur $p \in [\![0\,, n]\!]$

$\mathscr{H}_p$: « Toute famille libre $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_p)$ à p éléments est complétable en une base de E »

1. *Initialisation : cas $p = n$.*
   Montrer que si $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_n)$ est libre, c'est une base de E.

1 Théorème de la base incomplète

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

(à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$)

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E est complétable en une base de E .

Exercice 2 : Preuve par récurrence descendante sur $p \in [\![0\,,n]\!]$

$\mathscr{H}_p$: « Toute famille libre $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \ldots, \vec{\ell}_p)$ à p éléments est complétable en une base de E »

1. *Initialisation : cas $p = n$.*
   Montrer que si $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \ldots, \vec{\ell}_n)$ est libre, c'est une base de E.
2. *Hérédité. Soit $p \in [\![1\,,n]\!]$.*
   On suppose $\mathscr{H}_p$ vraie. Montrer que $\mathscr{H}_{p-1}$ est vraie.

1 Théorème de la base incomplète

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

(à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$)

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E est complétable en une base de E .

Exercice 2 : Preuve par récurrence descendante sur $p \in [\![0, n]\!]$

$\mathscr{H}_p$: « Toute famille libre $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_p)$ à p éléments est complétable en une base de E »

Remarque

En prenant $\mathscr{L} = \varnothing$, le résultat montré dans l'exercice 2 assure que :
De toute famille génératrice de E on peut

1 Théorème de la base incomplète

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

(à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$)

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E est complétable en une base de E .

Exercice 2 : Preuve par récurrence descendante sur $p \in [\![0\,, n]\!]$

$\mathscr{H}_p$: « Toute famille libre $\mathscr{L} = (\vec{\ell}_1, \ldots, \vec{\ell}_p)$ à p éléments est complétable en une base de E »

Remarque

En prenant $\mathscr{L} = \varnothing$, le résultat montré dans l'exercice 2 assure que : De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

1 Théorème de la base incomplète

Cadre

$\mathbb{K}$-e.v. de dim finie

- $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n)$ est une famille génératrice finie de E .

(à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$)

Théorème 2 : Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E est complétable en une base de E .

Remarque

En prenant $\mathscr{L} = \varnothing$, le résultat montré dans l'exercice 2 assure que :
De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

(théorème de la base extraite)

Exemple 2

Compléter $((1, 0, 1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.
On admet que les bases de $\mathbb{R}^3$ sont les familles libres à 3 vecteurs

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est :

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté Card$\mathscr{F}$.

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté Card$\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases :

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Card}\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Card}\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* :

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Card}\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* : le cardinal commun à toutes ses bases.

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Card}\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Card}\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

Remarque

Pour déterminer $\dim E$ il suffit de :

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Card}\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

Remarque

Pour déterminer $\dim E$ il suffit de : trouver une base de E

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Card}\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de* E : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

Remarque

Pour déterminer $\dim E$ il suffit de : trouver une base de E

Exercice 3

Démontrer le théorème.

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté Card$\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

Exemple 3 : Déterminer la dimension de F

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(0)\}.$$

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté Card$\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de* E : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

Exemple 4 : Deviner la dimension de T_n

T_n est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté Card$\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

Exemple 5 : Démontrer que

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2 Dimension d'un espace vectoriel

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{Card}\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

Exemple 5 : Démontrer que

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Matrices symétriques

Matrices antisymétriques

Notation Si $\mathscr{F}$ est une famille finie de vecteurs le cardinal de $\mathscr{F}$ est : le nombre d'éléments de $\mathscr{F}$, noté Card$\mathscr{F}$.

Théorème 3

- Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases : sont finies et ont le même cardinal.
- On appelle *dimension de E* : le cardinal commun à toutes ses bases.

noté $\dim E$

On admet que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

Exemple 5 : Démontrer que

$$\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Matrices symétriques

Matrices antisymétriques

3 Exemples

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n =$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] =$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$

3 Exemples

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] =$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$

3 Exemples

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

3 Exemples

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Remarque

$E = \left\{\vec{0}_E\right\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Remarque

$E = \left\{\vec{0}_E\right\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.

Remarque

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} =$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$

3 Exemples

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Remarque

$E = \left\{\vec{0}_E\right\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.

Remarque

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Remarque

$E = \left\{\vec{0}_E\right\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.

Une base est $(1, i)$

Remarque

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Remarque

$E = \left\{\vec{0}_E\right\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.

Une base est (1)

Une base est $(1, i)$

Remarque

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Remarque

$E = \left\{\vec{0}_E\right\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.

Une base est (1)

Une base est $(1, i)$

Remarque

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Exemple 6 : $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n\right\}$

Montrer que F est un plan vectoriel .

de dimension 2

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Remarque

$E = \left\{\vec{0}_E\right\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.

Une base est (1)

Une base est $(1, i)$

Remarque

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Exemple 7 : $\mathscr{S}_1$: ensemble des solutions de $(1+t^2)y' - ty = 0$

1. Montrer que $\mathscr{S}_1$ est une droite vectorielle .

de dimension 1

3 Exemples

en particulier $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Théorème 4 : Exemples fondamentaux

- $\dim \mathbb{K}^n = n$
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$
- $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Remarque

$E = \left\{\vec{0}_E\right\}$ est de dimension 0, une base est la famille vide.

Une base est (1)

Une base est $(1, i)$

Remarque

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Exemple 7 : $\mathscr{S}_2$: ensemble des solutions de $y'' - 8y' + 15y = 0$

2. Montrer que $\mathscr{S}_2$ est un plan vectoriel.

Théorème 5 : Espace produit

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie alors $E \times F$ est de dimension finie et :

$$\dim(E \times F) =$$

Théorème 5 : Espace produit

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie alors $E \times F$ est de dimension finie et :

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

II Utiliser la dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie . ▪ $n = \dim E$.

Théorème 1

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie .
- $n = \dim E$.

Théorème 1

1. Toute famille libre de E a au plus n éléments.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie .
- $n = \dim E$.

Théorème 1

1. Toute famille libre de E a au plus n éléments.
2. Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie .
- $n = \dim E$.

Théorème 1

1. Toute famille libre de E a au plus n éléments.
2. Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Exercice 1

Démontrer le théorème.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie . ▪ $n = \dim E$.

Théorème 1

1. Toute famille libre de E a au plus n éléments.
2. Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Exercice 1

Démontrer le théorème.

Exemple 1

Montrer que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie .
- $n = \dim E$.

Théorème 2

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie .
- $n = \dim E$.

Théorème 2

1. Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie . ▪ $n = \dim E$.

Théorème 2

1. Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie . ▪ $n = \dim E$.

Théorème 2

1. Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Exercice 2

Démontrer le théorème.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie . ▪ $n = \dim E$.

Théorème 2

1. Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

SF 4 : Montrer qu'une famille de cardinal n est une base de E

On vérifie uniquement la liberté

Exemple 2

Montrer que $((2,3)\,,\,(4,5))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie . ▪ $n = \dim E$.

Théorème 2

1. Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

SF 4 : Montrer qu'une famille de cardinal n est une base de E

On vérifie uniquement la liberté

Exemple 3

Montrer que $(X + 2X^2 \ , \ 1 + 2X \ , \ 2 + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie . ▪ $n = \dim E$.

Théorème 2

1. Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

SF 4 : Montrer qu'une famille de cardinal n est une base de E

On vérifie uniquement la liberté

Exemple 4

Montrer que la famille $((X-a)^k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1 Familles libres /génératrices en dimension finie

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie . ▪ $n = \dim E$.

Théorème 2

1. Toute famille libre de E de cardinal n est une base de E.
2. Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

SF 4 : Montrer qu'une famille de cardinal n est une base de E

On vérifie uniquement la liberté

polynômes de Lagrange associés aux x_i.

Exemple 5

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts.
Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2 Sous-espaces et dimension

Théorème 3

On suppose que E est dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

Théorème 3

On suppose que E est dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

- F est de dimension finie et $\dim F \leq n$.

Théorème 3

On suppose que E est dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

- F est de dimension finie et $\dim F \leq n$.
- $F = E$ si et seulement si $\dim F = n$.

2 Sous-espaces et dimension

Théorème 3

On suppose que E est dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

- F est de dimension finie et $\dim F \leq n$.
- $F = E$ si et seulement si $\dim F = n$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

2 Sous-espaces et dimension

Théorème 3

On suppose que E est dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

- F est de dimension finie et $\dim F \leq n$.
- $F = E$ si et seulement si $\dim F = n$.

SF 5 : Montrer que $F = G$ par « inclusion dimension »

On montre :
- $F \subset G$
- $\dim F = \dim G$.

Théorème 3

On suppose que E est dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :

- F est de dimension finie et $\dim F \leq n$.
- $F = E$ si et seulement si $\dim F = n$.

SF 5 : Montrer que $F = G$ par « inclusion dimension »

On montre :
- $F \subset G$
- $\dim F = \dim G$.

Exemple 6

Montrer que $\mathrm{Vect}(X - 1\,,\, X + 2) = \mathbb{R}_1[X]$.

3 Rang d'une famille de vecteurs

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-e.v. (de dimension quelconque)
- $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est une famille finie de vecteurs de E.

3 Rang d'une famille de vecteurs

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-e.v. (de dimension quelconque)

  $\mathrm{Vect}\,\mathscr{F}$ est de dimension finie
- $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est une famille finie de vecteurs de E.

3 Rang d'une famille de vecteurs

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-e.v. (de dimension quelconque)
- $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est une famille finie de vecteurs de E.

$\mathrm{Vect}\,\mathscr{F}$ est de dimension finie

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\,\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\,\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=}}$

3 Rang d'une famille de vecteurs

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-e.v. (de dimension quelconque)

Vect$\mathscr{F}$ est de dimension finie

- $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est une famille finie de vecteurs de E.

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté rg$\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \quad}$

3 Rang d'une famille de vecteurs

Cadre

- E est un $\mathbb{K}$-e.v. (de dimension quelconque)

Vect $\mathscr{F}$ est de dimension finie

- $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille finie de vecteurs de E.

ou $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\operatorname{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\operatorname{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \operatorname{Vect}\mathscr{F}}$

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours :
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi :

3 Rang d'une famille de vecteurs

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi :

3 Rang d'une famille de vecteurs

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Exercice 4

Démontrer les deux points ci-dessus.

3 Rang d'une famille de vecteurs

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Exemple 7 : Déterminer le rang de la famille

a) $\quad \mathscr{F}_1 = ((1, 1, 0), (0, 0, 1))$

3 Rang d'une famille de vecteurs

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Exemple 7 : Déterminer le rang de la famille

b) $\quad \mathscr{F}_2 = ((1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Exemple 7 : Déterminer le rang de la famille

a) $\quad \mathscr{F}_1 = (1\,, X\,, X^2\,, X^3)$

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Exemple 7 : Déterminer le rang de la famille

b) $\mathscr{F}_2 = (X\,,\, 2X\,,\, 3X\,,\, 4X)$

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Exemple 7 : Déterminer le rang de la famille

c) $\mathscr{F}_3 = (X+1\,,\; X+2\,,\; X+3\,,\; X+4)$

ou $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\operatorname{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$:

$$\boxed{\operatorname{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \operatorname{Vect}\mathscr{F}}$$

Théorème 4

- On a toujours : $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Montrer que $\dim F \geq p$:

-
-

Exemple 7 : Déterminer le rang de la famille

$$\text{c)} \qquad \mathscr{F}_3 = (X+1\,,\; X+2\,,\; X+3\,,\; X+4)$$

3 Rang d'une famille de vecteurs

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème

Montrer que $\dim F \geq p$:

- F possède une famille libre de cardinal p
- F contient un sev de dimension p

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Exemple 7 : Déterminer le rang de la famille

$$\text{c)} \quad \mathscr{F}_3 = (X+1\,,\, X+2\,,\, X+3\,,\, X+4)$$

3 Rang d'une famille de vecteurs

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Montrer que $\dim F \geq p$:

- F possède une famille libre de cardinal p
- F contient un sev de dimension p

Montrer que $\dim F \leq p$:

- F possède une famille génératrice de cardinal p
- F est contenu dans un sev de dimension p

Exemple 7 : Déterminer le rang de la famille

c) $\quad \mathscr{F}_3 = (X+1\,,\, X+2\,,\, X+3\,,\, X+4)$

3 Rang d'une famille de vecteurs

ou $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$

Définition 1

Le *rang* de $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}\mathscr{F}$, est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $\boxed{\mathrm{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \mathrm{Vect}\mathscr{F}}$

Théorème 4

- On a toujours : $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \leq p$.
- $\mathrm{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = p$ ssi : $\mathscr{F}$ est libre

Exemple 8 : Trouver le rang de $(f_1, \dots, f_n)$ $\quad (n \geq 2)$

f_k est la fonction $x \mapsto \sin(k + x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

III Somme de sous-espaces

Cadre

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1

- La somme de F et G est :

1 Généralités

Cadre

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1

- La somme de F et G est : $F+G \underset{\text{déf.}}{=} \{x+y\ ;\ x\in F,\ y\in G\}$

Cadre

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1

- La somme de F et G est : $F + G \underset{\text{déf.}}{=} \{x + y \ ; \ x \in F, \ y \in G\}$
- $F \subset F + G$

1 Généralités

Cadre

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1

- La somme de F et G est : $F + G \underset{\text{déf.}}{=} \{x + y \; ; \; x \in F, \; y \in G\}$
- $F \subset F + G$
- $G \subset F + G$

1 Généralités

Cadre

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1

- La somme de F et G est : $F + G \underset{\text{déf.}}{=} \{x + y \,;\, x \in F,\ y \in G\}$
- $F \subset F + G$
- $G \subset F + G$
- Soit H un sev de E :

1 Généralités

Cadre

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1

- La somme de F et G est : $F + G \underset{\text{déf.}}{=} \{x + y \,;\, x \in F,\ y \in G\}$
- $F \subset F + G$
- $G \subset F + G$
- Soit H un sev de E : $F + G \subset H$ ssi $F \subset H$ et $G \subset H$

1 Généralités

Question :
« Montrer que $F + G \subset H$ »

Cadre

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1

- La somme de F et G est : $F + G \underset{\text{déf.}}{=} \{x + y \,;\, x \in F,\ y \in G\}$
- $F \subset F + G$
- $G \subset F + G$
- Soit H un sev de E : $F + G \subset H$ ssi $F \subset H$ et $G \subset H$

1 Généralités

Question :
« Montrer que $F + G \subset H$ »

On montre :
- $F \subset H$
- $G \subset H$

Cadre

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1

- La somme de F et G est : $F + G \underset{\text{déf.}}{=} \{x + y : x \in F,\ y \in G\}$
- $F \subset F + G$ — $G \subset F + G$
- Soit H un sev de E : $F + G \subset H$ ssi $F \subset H$ et $G \subset H$

Exercice 1 : Vérifier que :

a) $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E b) $F \subset F + G$

Exercice 2 :

$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$ **et** $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$

a) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$ b) Trouver une base de $F \cap G$

La somme de Vect est simple

Exercice 2 :
$F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ **et** $G = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$

a) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$ b) Trouver une base de $F \cap G$

La somme de Vect est simple
$\mathrm{Vect}X + \mathrm{Vect}\,Y = \mathrm{Vect}(X \cup Y)$
pour toutes parties X, Y de E

Exercice 2 :
$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$ **et** $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$

a) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$ b) Trouver une base de $F \cap G$

La somme de Vect est simple
$\mathrm{Vect}\,X + \mathrm{Vect}\,Y = \mathrm{Vect}(X \cup Y)$
pour toutes parties X, Y de E

☢ Pas de formule pour
$\mathrm{Vect}\,X \cap \mathrm{Vect}\,Y$ ☢

Exercice 2 :
$F = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$ **et** $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)$

a) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$ b) Trouver une base de $F \cap G$

1 Généralités

La somme de Vect est simple
$\operatorname{Vect} X + \operatorname{Vect} Y = \operatorname{Vect}(X \cup Y)$
pour toutes parties X, Y de E

☢ Pas de formule pour
$\operatorname{Vect} X \cap \operatorname{Vect} Y$ ☢

Exercice 2 :
$F = \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ **et** $G = \operatorname{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$

a) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$ b) Trouver une base de $F \cap G$

Théorème 1 : Formule de Grassmann

Si F, G sont de dimension finie alors $F + G$ l'est aussi et :

La somme de Vect est simple
$\mathrm{Vect}\,X + \mathrm{Vect}\,Y = \mathrm{Vect}(X \cup Y)$
pour toutes parties X, Y de E

Pas de formule pour
$\mathrm{Vect}\,X \cap \mathrm{Vect}\,Y$

Exercice 2 :
$F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ **et** $G = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$

a) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$ b) Trouver une base de $F \cap G$

Théorème 1 : Formule de Grassmann

Si F, G sont de dimension finie alors $F + G$ l'est aussi et :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

2 Somme directe

Définition 2

On dit que F et G sont en somme *directe* si :

2 Somme directe

Définition 2

On dit que F et G sont en somme *directe* si : pour tout $z \in F + G$, il y a unicité de la décomposition sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

2 Somme directe

Définition 2

On dit que F et G sont en somme *directe* si : pour tout $z \in F + G$, il y a unicité de la décomposition sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Notation

Lorsque F et G sont en somme directe, la somme est notée :

2 Somme directe

Définition 2

On dit que F et G sont en somme *directe* si : pour tout $z \in F + G$, il y a unicité de la décomposition sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Notation

Lorsque F et G sont en somme directe, la somme est notée : $F \oplus G$

2 Somme directe

Définition 2

On dit que F et G sont en somme *directe* si : pour tout $z \in F + G$, il y a unicité de la décomposition sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Indique que la somme est directe $=$ unicité

Notation

Lorsque F et G sont en somme directe, la somme est notée : $F \oplus G$

2 Somme directe

Définition 2

On dit que F et G sont en somme *directe* si : pour tout $z \in F + G$, il y a unicité de la décomposition sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Indique que la somme est directe = unicité

Notation

Lorsque F et G sont en somme directe, la somme est notée : $F \oplus G$

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si :

2 Somme directe

Définition 2

On dit que F et G sont en somme *directe* si : pour tout $z \in F + G$, il y a unicité de la décomposition sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Indique que la somme est directe = unicité

Notation

Lorsque F et G sont en somme directe, la somme est notée : $F \oplus G$

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exercice 3

Démontrer cette équivalence.

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :

$F = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a + b + c = 0\right\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$

- Montrer que F et G sont en somme directe

2 Somme directe

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :
$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$

- Montrer que F et G sont en somme directe
- Bonus : base de $F \oplus G$?

2 Somme directe

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :

$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$

- Montrer que F et G sont en somme directe
- Bonus : base de $F \oplus G$?

Remarque

Notons $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G.

2 Somme directe

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :

$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$

- Montrer que F et G sont en somme directe
- Bonus : base de $F \oplus G$?

Remarque

Notons $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G.

- Si F et G sont en somme directe alors $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une base de $F \oplus G$ appelée *base adaptée à la somme directe* $F \oplus G$.

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :

$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$

- Montrer que F et G sont en somme directe
- Bonus : base de $F \oplus G$?

En particulier
$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Remarque

Notons $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G.

- Si F et G sont en somme directe alors $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une base de $F \oplus G$ appelée *base adaptée à la somme directe* $F \oplus G$.

2 Somme directe

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :

$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$

- Montrer que F et G sont en somme directe
- Bonus : base de $F \oplus G$?

En particulier
$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Remarque

Notons $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G.

- Si F et G sont en somme directe alors $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une base de $F \oplus G$ appelée *base adaptée à la somme directe* $F \oplus G$.
- Réciproquement si $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est libre F et G sont en somme directe

2 Somme directe

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :

$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$

- Montrer que F et G sont en somme directe
- Bonus : base de $F \oplus G$?

Pour montrer F et G sont en somme directe on peut :

En particulier
$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Remarque

Notons $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G.

- Si F et G sont en somme directe alors $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une base de $F \oplus G$ appelée *base adaptée à la somme directe* $F \oplus G$.
- Réciproquement si $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est libre F et G sont en somme directe

2 Somme directe

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :

$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$

- Montrer que F et G sont en somme directe
- Bonus : base de $F \oplus G$?

Pour montrer F et G sont en somme directe on peut :

- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$

En particulier

$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Remarque

- Notons $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G.
- Si F et G sont en somme directe alors $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ est une base de $F \oplus G$ appelée *base adaptée à la somme directe* $F \oplus G$.
- Réciproquement si $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ est libre F et G sont en somme directe

2 Somme directe

Théorème 2 : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si : si $F \cap G = \{0_E\}$

Exemple 1 :

$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\}$ **et** $G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$

- Montrer que F et G sont en somme directe
- Bonus : base de $F \oplus G$?

Pour montrer F et G sont en somme directe on peut :

- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$
- Montrer que $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est libre

En particulier
$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Remarque

- Notons $\mathscr{B}$ une base de F et $\mathscr{C}$ une base de G.
- Si F et G sont en somme directe alors $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une base de $F \oplus G$ appelée *base adaptée à la somme directe* $F \oplus G$.
- Réciproquement si $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est libre F et G sont en somme directe

3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \mid \begin{cases} y + z = x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \mid \begin{cases} y+z=x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Remarque

Autrement dit, F et G sont supplémentaires si :

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \mid \begin{cases} y+z=x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Remarque

Autrement dit, F et G sont supplémentaires si :

- $F \cap G = \{0\}$
-

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \mid \begin{cases} y+z=x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Remarque

Autrement dit, F et G sont supplémentaires si :

- $F \cap G = \{0\}$
- $F + G = E$.

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \mid \begin{cases} y+z=x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Unicité

Remarque

Autrement dit, F et G sont supplémentaires si :

- $F \cap G = \{0\}$
- $F + G = E$.

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \mid \begin{cases} y + z = x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Unicité

Existence

Remarque

Autrement dit, F et G sont supplémentaires si :

- $F \cap G = \{0\}$
- $F + G = E$.

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \mid \begin{cases} y + z = x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Unicité

Existence

Remarque

Autrement dit, F et G sont supplémentaires si :

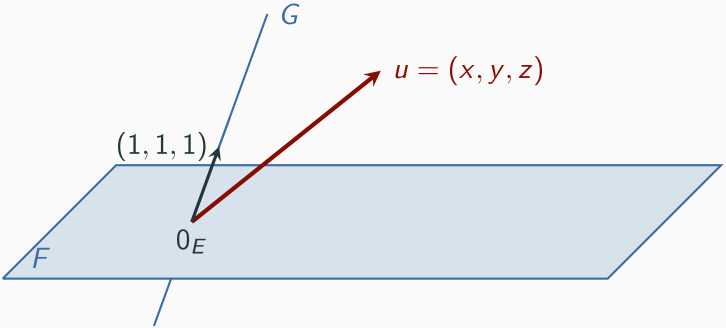
- $F \cap G = \{0\}$
- $F + G = E$.

Exemple 2 : Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1,1,1))$$

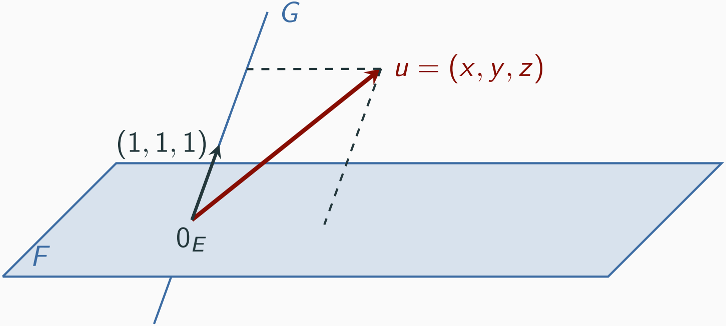
Exemple 2 : Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$$



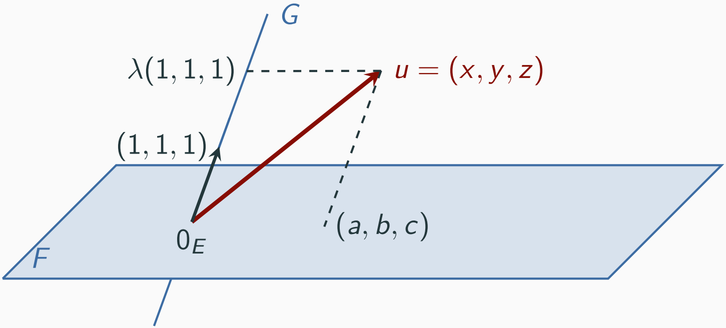
Exemple 2 : Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$$



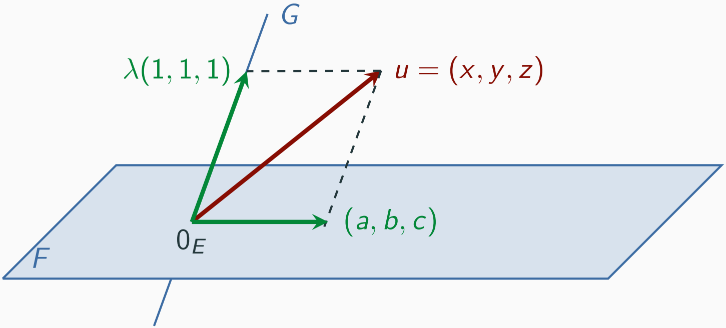
Exemple 2 : Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$



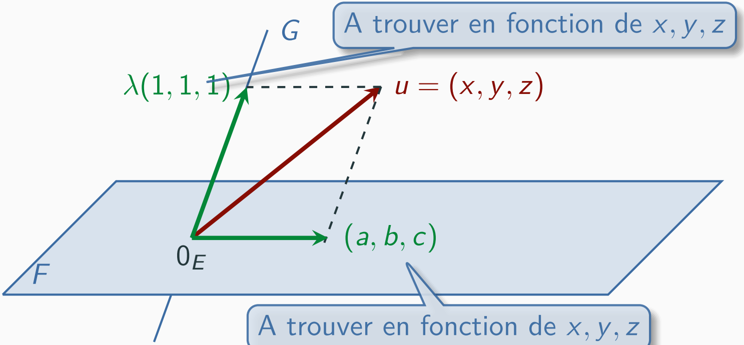
Exemple 2 : Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$



Exemple 2 : Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$$



Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple 3 : Montrer que $F \oplus G = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

F est l'ensemble des fonctions paires et G est l'ensemble des fonctions impaires

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \mid \begin{cases} y + z = x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple 3 : Montrer que $F \oplus G = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

F est l'ensemble des fonctions paires et G est l'ensemble des fonctions impaires

3 Sous-espaces supplémentaires

$$\forall x \in E, \quad \exists!(y,z) \in E \times E \;\middle|\; \begin{cases} y+z=x \\ y \in F \\ z \in G \end{cases}$$

Définition 2

F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple 4 : Montrer que $B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X] = \mathbb{K}[X]$

$B \in \mathbb{K}[X]$ est fixé de degré $n \geq 1$.
$B\mathbb{K}[X] = \{BQ\,;\ Q \in \mathbb{K}[X]\}$ est l'ensemble des multiples de B .

4 Supplémentaires en dimension finie

Théorème 3 : Supplémentaires en dimension finie

Si E de dimension finie, F et G sont en supplémentaires ssi

Théorème 3 : Supplémentaires en dimension finie

Si E de dimension finie, F et G sont en supplémentaires ssi

$$\boxed{F \cap G = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \dim F + \dim G = \dim E}$$

4 Supplémentaires en dimension finie

A utiliser pour montrer que
$F \oplus G = E$
(en dimension finie)

Théorème 3 : Supplémentaires en dimension finie

Si E de dimension finie, F et G sont en supplémentaires ssi

$$\boxed{F \cap G = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \dim F + \dim G = \dim E}$$

A utiliser pour montrer que
$F \oplus G = E$
(en dimension finie)

Théorème 3 : Supplémentaires en dimension finie

Si E de dimension finie, F et G sont en supplémentaires ssi

$$\boxed{F \cap G = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \dim F + \dim G = \dim E}$$

Exemple 5 : Montrer que $F \oplus G = \mathbb{K}_2[X]$

$$F = \mathrm{Vect}(2X+1) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(X^2+X, X^2+X+1)$$

A utiliser pour montrer que
$F \oplus G = E$
(en dimension finie)

Théorème 3 : Supplémentaires en dimension finie

Si E de dimension finie, F et G sont en supplémentaires ssi

$$\boxed{F \cap G = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \dim F + \dim G = \dim E}$$

Exemple 6 : Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b+c=0\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

4 Supplémentaires en dimension finie

Théorème 4 : Existence de supplémentaires en dimension finie

Si E est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel F de E possède :

4 Supplémentaires en dimension finie

Théorème 4 : Existence de supplémentaires en dimension finie

Si E est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel F de E possède : au moins un supplémentaire.

4 Supplémentaires en dimension finie

Théorème 4 : Existence de supplémentaires en dimension finie

Si E est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel F de E possède : au moins un supplémentaire.

Exercice 4

Démontrer ce théorème à l'aide du théorème de la base incomplète.

4 Supplémentaires en dimension finie

Théorème 4 : Existence de supplémentaires en dimension finie

Si E est de dimension finie alors tout sous-espace vectoriel F de E possède : au moins un supplémentaire.

Exemple 7 : Trouver un supplémentaire de F dans $E = \mathbb{R}_3[X]$

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; P(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

Pour finir

Exercice 5

Démontrer la formule de Grassmann

Pour finir

Si F, G sont de dimension finie alors $F + G$ l'est aussi et :
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Exercice 5

Démontrer la formule de Grassmann

Pour finir

Si F, G sont de dimension finie alors $F + G$ l'est aussi et :
$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Exercice 5

Démontrer la formule de Grassmann

Pour la preuve, on peut utiliser :
$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$