Espaces vectoriels

Chapitre 20

I Généralités sur les espaces vectoriels

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble E* muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\to$

$\mapsto$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\mathbb{K} \times E \rightarrow$

$\mapsto$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ & \mapsto & \end{array}$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda\,,\,\vec{x}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{array}$$

vecteur

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$

scalaire vecteur

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$

qui vérifie les quatre propriétés suivantes

scalaire

vecteur

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$

scalaire

vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes

1. $\forall \vec{x} \in E, \qquad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$

scalaire

vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. $\forall \vec{x} \in E, \qquad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
2. $\forall \vec{x} \in E, \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) =$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda\,,\,\vec{x}\,) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{array}$

scalaire vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. $\forall \vec{x}\in E, \qquad 1\cdot\vec{x}=\vec{x}$
2. $\forall \vec{x}\in E, \qquad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\mu)\cdot\vec{x}$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{array}$

scalaire vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes

1. $\forall \vec{x}\in E, \quad 1\cdot\vec{x}=\vec{x}$
2. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\mu)\cdot\vec{x}$
3. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{array}$

scalaire vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes

1. $\forall \vec{x}\in E, \quad 1\cdot\vec{x}=\vec{x}$
2. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\mu)\cdot\vec{x}$
3. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{array}$

scalaire

vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes

1. $\forall \vec{x}\in E,\quad 1\cdot\vec{x}=\vec{x}$
2. $\forall \vec{x}\in E,\quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\mu)\cdot\vec{x}$
3. $\forall \vec{x}\in E,\quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$
4. $\forall \vec{x},\vec{y}\in E,\quad \forall \lambda\in\mathbb{K},\quad \lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i) une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif

ii) une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$

scalaire

vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. $\forall \vec{x} \in E, \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
2. $\forall \vec{x} \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x}$
3. $\forall \vec{x} \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$
4. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$

1 La structure d'espace vectoriel

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Elément neutre de $(E,+)$: vecteur nul

Définition 1

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i)une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii)une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{array}$

scalaire vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes

1. $\forall \vec{x}\in E, \quad 1\cdot\vec{x}=\vec{x}$
2. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\mu)\cdot\vec{x}$
3. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$
4. $\forall \vec{x},\vec{y}\in E, \quad \forall \lambda\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$

1 La structure d'espace vectoriel

Définition 1

ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Elément neutre de $(E,+)$: vecteur nul

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i) une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii) une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\underbrace{\lambda}_{\text{scalaire}}, \underbrace{\vec{x}}_{\text{vecteur}}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{array}$

qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. $\forall \vec{x}\in E, \quad 1\cdot\vec{x}=\vec{x}$
2. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\mu)\cdot\vec{x}$
3. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$
4. $\forall \vec{x},\vec{y}\in E, \quad \forall \lambda\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$

Exercice 1

1. Soit $\vec{x}\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Montrer : $\lambda\cdot\vec{x}=\vec{0}_E \Leftrightarrow \lambda=0$ ou $x=0$

1 La structure d'espace vectoriel

Définition 1 ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Elément neutre de $(E,+)$: vecteur nul

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :

i) une L.C.I. $+$, addition, telle que $(E,+)$ est un groupe commutatif

ii) une multiplication externe *i.e.* une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda\cdot\vec{x} \end{array}$

scalaire vecteur

qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. $\forall \vec{x}\in E, \quad 1\cdot\vec{x}=\vec{x}$
2. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\mu)\cdot\vec{x}$
3. $\forall \vec{x}\in E, \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}, \quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}$
4. $\forall \vec{x},\vec{y}\in E, \quad \forall\lambda\in\mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$

Exercice 1

2. Soit $\vec{x}\in E$. Montrer que : $\quad (-1)\cdot\vec{x}=-\vec{x}$

2 Espaces vectoriels de références

Exemple 0

$(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

2 Espaces vectoriels de références

La multiplication « externe »
est la multiplication $\times$ de $\mathbb{K}$

Exemple 0

$(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

2 Espaces vectoriels de références

La multiplication « externe »
est la multiplication $\times$ de $\mathbb{K}$

Exemple 0

$(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Exemple 1 : $\mathbb{K}^n$

L'ensemble des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Espaces vectoriels de références

La multiplication « externe » est la multiplication $\times$ de $\mathbb{K}$

Exemple 0

$(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Exemple 1 : $\mathbb{K}^n$

L'ensemble des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2

Donner la définition des deux opérations dans $\mathbb{K}^n$ et préciser le vecteur nul $\vec{0}_{\mathbb{K}^n}$.

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

2 Espaces vectoriels de références

$$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \quad \text{et} \quad \lambda A=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

2 Espaces vectoriels de références

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$$P + Q \quad \text{et} \quad \lambda P$$

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

2 Espaces vectoriels de références

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$$P + Q \quad \text{et} \quad \lambda P$$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Exemple 4 : $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$

Si X est une partie de $\mathbb{R}$.
$\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles.

2 Espaces vectoriels de références

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$$P + Q \quad \text{et} \quad \lambda P$$

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Exemple 4 : $\mathscr{F}(X, E)$

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et X un ensemble non vide.
$\mathscr{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$$P + Q \quad \text{et} \quad \lambda P$$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$$f+g : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \lambda\cdot f : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda\cdot f(x) \end{array}$$

Exemple 4 : $\mathscr{F}(X, E)$

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et X un ensemble non vide.
$\mathscr{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

2 Espaces vectoriels de références

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$$P + Q \quad \text{et} \quad \lambda P$$

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Exemple 5 : $E \times F$

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on définit sur $E \times F$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Espaces vectoriels de références

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$P + Q \quad \text{et} \quad \lambda P$

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Par ex : $(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') \underset{\text{déf.}}{=} (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$

Exemple 5 : $E \times F$

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on définit sur $E \times F$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$P + Q \quad \text{et} \quad \lambda P$

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Par ex : $(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') \underset{\text{déf.}}{=} (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$

Exemple 5 : $E \times F$

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on définit sur $E \times F$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 3

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \quad \text{et} \quad \lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$P + Q$ et λP

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Par ex : $(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') \underset{\text{déf.}}{=} (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}')$

Exemple 5 : $E \times F$

Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on définit sur $E \times F$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque

Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi : un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

2 Espaces vectoriels de références

$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$

Exemple 2 : $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

$P+Q$ et λP

Exemple 3 : $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations usuelles

Par ex : $(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x}',\vec{y}')\underset{\text{déf.}}{=}(\vec{x}+\vec{x}',\vec{y}+\vec{y}')$

Exemple 5 : $E\times F$

Si E,F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on définit sur $E\times F$ une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$\lambda\cdot\vec{x}$ est déf. pour $\lambda\in\mathbb{C}$
donc aussi si $\lambda\in\mathbb{R}$

Remarque

Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi : un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme :

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont :

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ *famille* de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?
Une seule : le vecteur nul

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ *famille* de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?
Une seule : le vecteur nul

Exemple 6 : Dans $\mathbb{R}^2$

1. Montrer que $\vec{u} = (3\,,\,2)$ est C.L. de $\vec{e}_1 = (1\,,\,0)$ et $\vec{e}_2 = (1\,,\,1)$.

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?
Une seule : le vecteur nul

Exemple 6 : Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2. Montrer que $f : t \mapsto \cos(t - \frac{\pi}{3})$ est C.L. de $g = \cos$ et $h = \sin$.

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ *famille* de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?
Une seule : le vecteur nul

Exemple 6 : Dans $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

3. Montrer que $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est C.L. de $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?
Une seule : le vecteur nul

Exemple 6 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

4a) Montrer que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est C.L. des polynômes $1, X, \dots, X^n$.

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ *famille* de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?
Une seule : le vecteur nul

Exemple 6 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

4b) Montrer que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est C.L. de $1, (X-1), \ldots, (X-1)^n$.

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ *famille* de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?
Une seule : le vecteur nul

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^3$ le vecteur $\vec{w} = (-5, -4, -1)$

Est-il C.L. de $\vec{u} = (1, 2, 1)$ et $\vec{v} = (1, -1, -1)$?

3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Remarque

Une combinaison linéaire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$ est un vecteur de la forme : $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si :

il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

Remarque

les $\lambda \cdot \vec{u}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$

Les combinaisons linéaires d'un seul vecteur $\vec{u}$ sont : les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.

C.L. de la famille vide ?
Une seule : le vecteur nul

Exercice 5 : Dans $\mathbb{R}[X]$ le vecteur $P = X^2 + 3X + 1$

Est-il C.L de $A = 1 + X$, $\quad B = 1 + 2X + X^2 \quad$ et $\quad C = X + X^2$?

II Sous-espaces vectoriels

1 Définition

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

1 Définition

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,

1 Définition

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$:

1 Définition

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$

1 Définition

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$:

1 Définition

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

E a toujours deux sous-espaces vectoriels

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

1 Définition

E a toujours deux sous-espaces vectoriels E et $\left\{\vec{0_E}\right\}$

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

E a toujours deux sous-espaces vectoriels E et $\left\{\vec{0_E}\right\}$

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

On vérifie que :

1 Définition

E a toujours deux sous-espaces vectoriels E et $\left\{\vec{0_E}\right\}$

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

On vérifie que :

i) $\vec{0}_E \in F$

1 Définition

E a toujours deux sous-espaces vectoriels E et $\left\{\vec{0}_E\right\}$

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

On vérifie que :

i) $\vec{0}_E \in F$

ii) F est stable par C.L. : $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F$

E a toujours deux sous-espaces vectoriels E et $\left\{\vec{0}_E\right\}$

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

On vérifie que :

i) $\vec{0}_E \in F$

ii) F est stable par C.L. : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F$

Exemple 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\right\}$$

1 Définition

E a toujours deux sous-espaces vectoriels E et $\left\{\vec{0}_E\right\}$

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

On vérifie que :

i) $\vec{0}_E \in F$

ii) F est stable par C.L. : $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F$

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Exemple 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 0\}$$

E a toujours deux sous-espaces vectoriels E et $\left\{\vec{0_E}\right\}$

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

On vérifie que :

i) $\vec{0}_E \in F$

ii) F est stable par C.L. : $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F$

Exemple 2 : Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

$F_1 = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$ et $F_2 = \{(x, y) \mid y = x^2\}$.

E a toujours deux sous-espaces vectoriels E et $\left\{\vec{0}_E\right\}$

Définition 1

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par $+$: $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x} + \vec{y} \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in F, \quad \lambda \vec{x} \in F$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

On vérifie que :

i) $\vec{0}_E \in F$

ii) F est stable par C.L. : $\quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in F$

Exemple 3 : Montrer que F est un sous-espace de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$$

Remarque

Si F est un sous-e.v. de E alors $(F, +, \cdot)$ est :

1 Définition

Remarque

Si F est un sous-e.v. de E alors $(F, +, \cdot)$ est : lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Remarque

Si F est un sous-e.v. de E alors $(F, +, \cdot)$ est : lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

En pratique : pour montrer que F est un espace vectoriel

Le plus simple est de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

1 Définition

Remarque

Si F est un sous-e.v. de E alors $(F, +, \cdot)$ est : lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

En pratique : pour montrer que F est un espace vectoriel

Le plus simple est de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Définition

Remarque

Si F est un sous-e.v. de E alors $(F, +, \cdot)$ est : lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

En pratique : pour montrer que F est un espace vectoriel

Le plus simple est de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exemple 5

L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Définition

Remarque

Si F est un sous-e.v. de E alors $(F, +, \cdot)$ est : lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

En pratique : pour montrer que F est un espace vectoriel

Le plus simple est de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

dérivables
$\mathscr{C}^1$
$\mathscr{C}^\infty$
...

Exemple 5

L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Définition

Théorème 1

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est :

1 Définition

Théorème 1

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est : un sous-espace vectoriel de E

1 Définition

Théorème 1

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est : un sous-espace vectoriel de E

Exercice 1

a) Prouver le théorème

b) Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est en général pas un sous-espace vectoriel de E

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 2

On note $\operatorname{Vect} \mathscr{F}$ l'ensemble :

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

On note Vect $\mathscr{F}$ l'ensemble :

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

On note Vect $\mathscr{F}$ l'ensemble : de toutes les combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

On note Vect $\mathscr{F}$ l'ensemble : de toutes les combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$

Remarque

$\text{Vect}(\varnothing) =$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

On note Vect $\mathscr{F}$ l'ensemble : de toutes les combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$

Remarque

$\text{Vect}(\varnothing) = \left\{\vec{0}_E\right\}$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 2

On note Vect $\mathscr{F}$ l'ensemble : de toutes les combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$

Remarque

$\text{Vect}(\varnothing) = \left\{\vec{0}_E\right\}$

Exemple 6 : Dans $E = \mathbb{R}^2$

Décrire géométriquement $\text{Vect}((1, 2))$.

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) =$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

Exemple 8 : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} =$

b) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n} =$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

Exemple 8 : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

b) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} =$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

Exemple 8 : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

b) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} = T_n$

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

Ensemble des matrices triangulaires sup.

Exemple 8 : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

b) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} = T_n$

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\text{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

Exemple 8 : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) $\text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

b) $\text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} = T_n$

Ensemble des matrices triangulaires sup.

Théorème 2

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

Exemple 8 : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

b) $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} = T_n$

Ensemble des matrices triangulaires sup.

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\text{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

Exemple 8 : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) $\text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

b) $\text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} = T_n$

Ensemble des matrices triangulaires sup.

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exemple 7 : Dans $E = \mathbb{K}[X]$

$\text{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$

Ensemble des matrices triangulaires sup.

Exemple 8 : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

a) $\text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

b) $\text{Vect}(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} = T_n$

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

Exercice 2

Démontrer ce théorème.

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

Théorème 3 : Caractérisation de « Vect »

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit s.e.v. de E qui contienne $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ *i.e.* :

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

Théorème 3 : Caractérisation de « Vect »

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit s.e.v. de E qui contienne $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ *i.e.* :

i) $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset \text{Vect } \mathscr{F}$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

Théorème 3 : Caractérisation de « Vect »

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit s.e.v. de E qui contienne $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ *i.e.* :

i) $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset$ Vect $\mathscr{F}$

ii) Pour tout s.e.v. G de E

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

Théorème 3 : Caractérisation de « Vect »

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit s.e.v. de E qui contienne $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ *i.e.* :

i) $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset \text{Vect } \mathscr{F}$

ii) Pour tout s.e.v. G de E si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset G$, alors $\text{Vect}\mathscr{F} \subset G$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$

Question : « Montrer que $\text{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \subset G$ »

Théorème 3 : Caractérisation de « Vect »

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit s.e.v. de E qui contienne $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ *i.e.* :

i) $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset \text{Vect } \mathscr{F}$

ii) Pour tout s.e.v. G de E si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset G$, alors $\text{Vect}\mathscr{F} \subset G$

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

Question : « Montrer que $\text{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \subset G$ »

Réponse : « Soit $i \in [\![1\,,n]\!]$. Montrons que $\vec{u}_i \in G$ »

Théorème 3 : Caractérisation de Vect

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit s.e.v. de E qui contienne $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ *i.e.* :

i) $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset \text{Vect}\,\mathscr{F}$

ii) Pour tout s.e.v. G de E si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset G$, alors $\text{Vect}\mathscr{F} \subset G$

2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Théorème 2

Vect $\mathscr{F}$ est un sous.e.v. de E appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

Question : « Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \subset G$ »

Réponse : « Soit $i \in [\![1\,,n]\!]$. Montrons que $\vec{u}_i \in G$ »

Théorème 3 : Caractérisation de Vect

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit s.e.v. de E qui contienne $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ *i.e.* :

i) $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset \mathrm{Vect}\ \mathscr{F}$

ii) Pour tout s.e.v. G de E si $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\} \subset G$, alors $\mathrm{Vect}\mathscr{F} \subset G$

Exercice 3

Démontrer le théorème.

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (2)

On écrit F « comme un Vect »

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (2)

On écrit F « comme un Vect »

Exemple 9 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - z = 0\}.$$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (2)

On écrit F « comme un Vect »

Exemple 10 : Montrer que F est un sous-e.v. de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + d = 0 \right\}.$$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (2)

On écrit F « comme un Vect »

Exemple 11 : Montrer que F est un sous-e.v. de $\mathbb{R}[X]$

$$F = \{(X-1)(aX+b) \quad ; \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (2)

On écrit F « comme un Vect »

Exemple 12 : Montrer que F est un sous-e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. F est l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$.

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (2)

On écrit F « comme un Vect »

Exemple 12 : Montrer que F est un sous-e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2. F est l'ensemble des solutions de $y'' - 8y' + 15y = 0$.

SF 1 : Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (2)

On écrit F « comme un Vect »

Exemple 13 : Montrer que F est un sous-e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0 \right\}.$$

III Familles génératrices

1 Familles génératrices finies

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- ou encore :

1 Familles génératrices finies

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- ou encore :

1 Familles génératrices finies

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E,$
- ou encore :

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore :

1 Familles génératrices finies

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\quad \mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

1 Familles génératrices finies

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\quad \mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

Exemple 1

1. Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est :

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\quad \mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

Exemple 1

1. Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est : $(1, X, \ldots, X^n)$

1 Familles génératrices finies

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\quad \mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

Exemple 1

1. Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est : $(1, X, \ldots, X^n)$
2. Une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

Exemple 1

1. Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est : $(1, X, \ldots, X^n)$
2. Une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

1 Familles génératrices finies

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\quad \mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

Exemple 1

1. Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est : $(1, X, \dots, X^n)$
2. Une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Exemple 2

Montrer que $((1,0), (0,1))$ engendre $\mathbb{R}^2$.

1 Familles génératrices finies

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\quad \mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

Exemple 1

1. Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est : $(1, X, \ldots, X^n)$
2. Une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Exemple 3

a) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par :

b) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par :

1 Familles génératrices finies

Définition 1

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\quad \mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

Exemple 1

1. Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est : $(1, X, \ldots, X^n)$
2. Une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Exemple 3

a) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par : $\quad (1, i)$

b) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par :

1 Familles génératrices finies

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

La famille $\mathscr{F}$ est *génératrice* de E (ou *engendre* E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$
- ou encore : $\mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

Exemple 1

1. Une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$ est : $(1, X, \dots, X^n)$
2. Une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

Exemple 3

a) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par : $(1, i)$

b) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est engendré par : (1)

1 Familles génératrices finies

Remarque

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E

Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et si $\mathscr{F}$ engendre E alors $\mathscr{G}$ engendre E

Remarque

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E

1 Familles génératrices finies

Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et si $\mathscr{F}$ engendre E
alors $\mathscr{G}$ engendre E

Remarque

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E

Théorème 1

Soit $\vec{u}_{n+1} \in E$. Si :

- $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+1})$ est génératrice de E

alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est encore génératrice de E

1 Familles génératrices finies

Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et si $\mathscr{F}$ engendre E
alors $\mathscr{G}$ engendre E

Remarque

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E

Théorème 1

Soit $\vec{u}_{n+1} \in E$. Si :

- $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+1})$ est génératrice de E
- $\vec{u}_{n+1}$ est combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$

alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est encore génératrice de E

Exercice 1

Démontrer le théorème

1 Familles génératrices finies

Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et si $\mathscr{F}$ engendre E
alors $\mathscr{G}$ engendre E

Remarque

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E

Théorème 1

Soit $\vec{u}_{n+1} \in E$. Si :

- $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n+1})$ est génératrice de E
- $\vec{u}_{n+1}$ est combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$

alors $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est encore génératrice de E

Exemple 4 : « chasser » dans un Vect

Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose : $F = \mathrm{Vect}(1\,,\, X\,,\, 1+X\,,\, 2X-3\,,\, 3X\,,\, 0)$.
Montrer que : $F = \mathrm{Vect}(1, X)$

1 Familles génératrices finies

Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et si $\mathscr{F}$ engendre E
alors $\mathscr{G}$ engendre E

Remarque

Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E

Théorème 1

Soit $\vec{u}_{n+1} \in E$. Si :

- $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n+1})$ est génératrice de E
- $\vec{u}_{n+1}$ est combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$

alors $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est encore génératrice de E

Exemple 5 : Trouver une famille génératrice de F

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + t = 0\}$$

2 Bases

Définition 2

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de* E si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore :

2 Bases

Définition 2

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de* E si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore : $\forall \vec{x} \in E,$

Définition 2

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de* E si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore : $\forall \vec{x} \in E, \ \exists! \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \ | \ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$

2 Bases

Définition 2

Il existe un unique

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de E* si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore : $\forall \vec{x} \in E,\ \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$

2 Bases

Définition 2

Il existe un unique

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de E* si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore : $\forall \vec{x} \in E, \ \exists! \ \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}_{\text{coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathscr{F}} \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$

coordonnées de x dans la base $\mathscr{F}$

Définition 2

Il existe un unique

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de E* si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore : $\forall \vec{x} \in E, \ \exists! \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$

coordonnées de x dans la base $\mathscr{F}$

Remarque

La famille vide est une base de $\left\{\vec{0}_E\right\}$

2 Bases

Définition 2

Il existe un unique

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de E* si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore : $\forall \vec{x} \in E, \ \exists! \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$

coordonnées de x dans la base $\mathscr{F}$

Exemple 6

a) Montrer que $((1,1), (1,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$

Définition 2

Il existe un unique

- La famille $\mathscr{F}$ est une *base de E* si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$
- Ou encore : $\forall \vec{x} \in E, \ \exists! \ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i$

coordonnées de x dans la base $\mathscr{F}$

Exemple 6

b) Montrer que $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Familles génératrices quelconques

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une famille indexée par un ensemble quelconque I

Familles génératrices quelconques

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une famille indexée par un ensemble quelconque I

Définition 3

$\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathscr{F}$.

Familles génératrices quelconques

d'où les définitions de :

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une famille indexée par un ensemble quelconque I

Définition 3

$\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathscr{F}$.

Familles génératrices quelconques

d'où les définitions de :

- Vect$\mathscr{F}$

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une famille indexée par un ensemble quelconque I

Définition 3

$\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathscr{F}$.

Familles génératrices quelconques

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une famille indexée par un ensemble quelconque I

d'où les définitions de :

- Vect$\mathscr{F}$
- Famille génératrice

Définition 3

$\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathscr{F}$.

Familles génératrices quelconques

d'où les définitions de :

- Vect$\mathscr{F}$
- Famille génératrice
- Base

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une famille [illegible] par un ensemble quelconque I

Définition 3

$\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathscr{F}$.

Familles génératrices quelconques

d'où les définitions de :

- Vect$\mathscr{F}$
- Famille génératrice
- Base

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i \in I}$ est une famille indexée par un ensemble quelconque I

Définition 3

$\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathscr{F}$.

Vocabulaire : famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ *presque nulle*

Un vecteur $\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si : $\vec{x} = \sum_{i \in I} \alpha_i \vec{u}_i$

Familles génératrices quelconques

d'où les définitions de :

- Vect$\mathscr{F}$
- Famille génératrice
- Base

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i\in I}$ est une famille indexée par un ensemble quelconque I

Définition 3

$\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathscr{F}$.

Vocabulaire : famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ *presque nulle*

Un vecteur $\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si : $\displaystyle \vec{x} = \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i$

pour certains $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux

Familles génératrices quelconques

d'où les définitions de :

- Vect$\mathscr{F}$
- Famille génératrice
- Base

Cadre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i\in I}$ est une famille … par un ensemble quelconque I

Définition 3

$\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathscr{F}$.

Vocabulaire : famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ ***presque nulle***

Un vecteur $\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ si : $\quad \vec{x} = \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i$

pour certains $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux

Exercice 2

Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est aussi l'intersection de tous les sous-espaces de E contenant $\{\vec{u}_i\}_{i\in I}$

Parties génératrices

Cadre

A est une partie de E

Parties génératrices

Cadre

A est une partie de E

Définition 4

On définit $\operatorname{Vect} A$ comme l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

Parties génératrices

Rien ne change : si $A = \{\vec{u}_i\}_{i \in I}$, alors, Vect A est l'ensemble des CL de $(\vec{u}_i)_{i \in I}$

Cadre

A est une partie de E.

Définition 4

On définit $\operatorname{Vect} A$ comme l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

IV Familles libres, bases

1 Familles libres

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls.

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls.

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$:

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si :

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si : il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si : il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E$.

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

ou :« les $\vec{u}_i$ sont linéairement indépendants »

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si : il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E$.

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

ou :« les $\vec{u}_i$ sont linéairement indépendants »

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si : il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E$.

Exemple 1 : $\vec{u}_1 = (1,0,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0)$, $\vec{v} = (1,1,0)$, $\vec{w} = (0,1,1)$

Montrer que : a) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v})$ est liée b) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{w})$ est libre

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ *famille* de vecteurs E

ou : « les $\vec{u}_i$ sont linéairement indépendants »

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si : il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E$.

Exemple 2 : La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est-elle libre ?

$$\vec{u}_1 = (1{,}0{,}2), \qquad \vec{u}_2 = (1{,}1{,}3), \qquad \vec{u}_3 = (2, -3, 1)$$

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

ou : « les $\vec{u}_i$ sont linéairement indépendants »

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si : il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E$.

Exemple 3 : La famille (P, Q, R) est-elle libre ?

$$P = -1 + 3X + 2X^2, \qquad Q = X + X^2, \qquad R = -X - 2X^2$$

1 Familles libres

$\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$
famille de vecteurs E

ou :« les $\vec{u}_i$ sont linéairement indépendants »

Définition 1

- $\mathscr{F}$ est libre si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit $\mathscr{F}$ est libre si pour tout $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si : il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E$.

Exemple 4 : Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f_1 : x \mapsto \cos x \qquad f_2 : x \mapsto \sin x \qquad f_3 : x \mapsto x\cos x \qquad f_4 : x \mapsto x \sin x$

1 Familles libres

Théorème 1

Une famille est liée ssi

1 Familles libres

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

1 Familles libres

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Exemple 5 : Montrer que (f_1, f_2, f_3) est liée dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f_1 : x \mapsto \cos x \quad , \quad f_2 : x \mapsto \sin x \quad , \quad f_3 : x \mapsto \cos(x - \tfrac{\pi}{3})$$

1 Familles libres

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi :

1 Familles libres

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires

1 Familles libres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires

1 Familles libres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires
- Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi :

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires
- Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi : $\vec{u} \neq \vec{0}_E$

1 Familles libres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires
- Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi : $\vec{u} \neq \vec{0}_E$
- La famille vide est :

1 Familles libres

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires
- Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi : $\vec{u} \neq \vec{0}_E$
- La famille vide est : libre

1 Familles libres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires
- Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi : $\vec{u} \neq \vec{0}_E$
- La famille vide est : libre

Théorème 2

- Si $\mathscr{F}$ est libre :
- Si $\mathscr{F}$ est libre et si :

1 Familles libres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires
- Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi : $\vec{u} \neq \vec{0}_E$
- La famille vide est : libre

Théorème 2

- Si $\mathscr{F}$ est libre : toute sous-famille de $\mathscr{F}$ est libre
- Si $\mathscr{F}$ est libre et si :

1 Familles libres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$
pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires
- Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi : $\vec{u} \neq \vec{0}_E$
- La famille vide est : libre

Théorème 2

- Si $\mathscr{F}$ est libre : toute sous-famille de $\mathscr{F}$ est libre
- Si $\mathscr{F}$ est libre et si : $\vec{u}_{n+1}$ n'est pas combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1})$ est encore libre

1 Familles libres

$\vec{u} = \vec{0}_E$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 1

Une famille est liée ssi l'un des vecteurs est C.L. des autres

Remarque

- Une famille de 2 vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi : ils sont colinéaires
- Une famille d'un seul vecteur $(\vec{u})$ est libre ssi : $\vec{u} \neq \vec{0}_E$
- La famille vide est : libre

Théorème 2

- Si $\mathscr{F}$ est libre : toute sous-famille de $\mathscr{F}$ est libre
- Si $\mathscr{F}$ est libre et si : $\vec{u}_{n+1}$ n'est pas combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ alors $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1})$ est encore libre

Exercice 1

Démontrer le second point

1 Familles libres

Théorème 3

- Une famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de polynômes est dite *de degrés étagés* si :

Théorème 3

- Une famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de polynômes est dite *de degrés étagés* si : $\forall k \in [\![0\,,n]\!], \quad \deg P_k = k$

1 Familles libres

Théorème 3

- Une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes est dite *de degrés étagés* si : $\quad \forall k \in [\![0\,,n]\!], \quad \deg P_k = k$
- Une famille de polynôme de degrés étagés est libre.

1 Familles libres

Théorème 3

- Une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes est dite *de degrés étagés* si : $\quad \forall k \in [\![0\,,n]\!], \quad \deg P_k = k$
- Une famille de polynôme de degrés étagés est libre.

Exercice 2

Démontrer la propriété de liberté par récurrence sur n.

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois :

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois : libre et génératrice.

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois : libre et génératrice.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois : libre et génératrice.

Exemple 6 : Trouver une base du sous-espace suivant

a) $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + t = 0\right\}$

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois : libre et génératrice.

Exemple 6 : Trouver une base du sous-espace suivant

$$\text{b)} \quad \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X+1) = XP'\}$$

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois : libre et génératrice.

Exemple 6 : Trouver une base du sous-espace suivant

$$\text{b)} \quad \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X+1) = XP'\}$$

Exemple 7 : Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

$$\mathscr{F} = (1\,,\,(X-a)\,,\,(X-a)^2\,,\,\dots\,,\,(X-a)^n)$$

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois : libre et génératrice.

Exemple 6 : Trouver une base du sous-espace suivant

$$\text{b)} \quad \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X+1) = XP'\}$$

Exemple 7 : Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

$$\mathscr{F} = (1\,,\,(X-a)\,,\,(X-a)^2\,,\,\dots\,,\,(X-a)^n)$$

Bonus : Coordonnées de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans la base $\mathscr{F}$?

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois : libre et génératrice.

Exemple 6 : Trouver une base du sous-espace suivant

$$\text{b)} \quad \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X+1) = XP'\}$$

Exemple 7 : Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

$$\mathscr{F} = (1\,,\,(X-a)\,,\,(X-a)^2\,,\,\dots\,,\,(X-a)^n)$$

Bonus : Coordonnées de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans la base $\mathscr{F}$?
dans la base $(L_0, \dots, L_n)$?

2 Bases

Théorème 4

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois : libre et génératrice.

Exemple 6 : Trouver une base du sous-espace suivant

$$\text{b)} \quad \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(X+1) = XP'\}$$

Exemple 7 : Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

$$\mathscr{F} = (1\,,\,(X-a)\,,\,(X-a)^2\,,\,\ldots\,,\,(X-a)^n)$$

Bonus : Coordonnées de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans la base $\mathscr{F}$?

dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$? dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$?

3 familles libres quelconques / parties libres

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est dite dite *libre* si

3 familles libres quelconques / parties libres

I ensemble quelconque

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est dite dite *libre* si

3 familles libres quelconques / parties libres

I ensemble quelconque

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite dite *libre* si toutes ses sous-familles finies sont libres.

3 familles libres quelconques / parties libres

I ensemble quelconque

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite dite *libre* si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Remarque

$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est *libre* si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0$$

I ensemble quelconque

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite dite *libre* si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Remarque

$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est *libre* si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle :

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0$$

I ensemble quelconque

Pour montrer la liberté d'une famille concrète

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite dite *libre* si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Remarque

$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est *libre* si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle :

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0$$

3 familles libres quelconques / parties libres

I ensemble quelconque

Pour montrer la liberté d'une famille concrète « Montrer que $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre »

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite dite *libre* si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Remarque

$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est *libre* si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle :

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0$$

I ensemble quelconque

Pour montrer la liberté d'une famille concrète « Montrer que $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre »

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite dite *libre* si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Remarque

$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est *libre* si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle :

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0$$

Pour les exercices abstraits

3 familles libres quelconques / parties libres

I ensemble quelconque

Pour montrer la liberté d'une famille concrète « Montrer que $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre »

Définition 2

La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite dite *libre* si toutes ses sous-familles finies sont libres.

Remarque

$(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est *libre* si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle :

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0$$

Pour les exercices abstraits « Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ presque nulle telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E$ ... »