Applications des développements limités

Chapitre 19.2

I Recherche d'équivalents et de limites

Théorème 1

On suppose que f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors :

Premier terme non nul du DL

Théorème 1

On suppose que f admet en a le DL$_n$:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors :

- $f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$

Premier terme non nul du DL

Théorème 1

On suppose que f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \underbrace{a_p(x-a)^p}_{\text{Premier terme non nul du DL}} + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors :

- $f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$
- Au voisinage de a, f est du signe de $x \mapsto a_p(x-a)^p$

1 Développements limités et équivalence

Premier terme non nul du DL

Théorème 1

On suppose que f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors :

- $f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$
- Au voisinage de a, f est du signe de $x \mapsto a_p(x-a)^p$

Exemple 1 : Equivalent au voisinage de 0

$$f(x) = x(1+\cos x) - 2\tan x$$

Premier terme non nul du DL

Théorème 1

On suppose que f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors :

- $f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$
- Au voisinage de a, f est du signe de $x \mapsto a_p(x-a)^p$

Exemple 2 : Equivalent au voisinage de 0

$$\ln(1+x^2) - \sin^2 x$$

Premier terme non nul du DL

Théorème 1

On suppose que f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors :

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$
- Au voisinage de a, f est du signe de $x \mapsto a_p(x-a)^p$

Exemple 3 : Signe, à partir d'un certain rang

$$u_n = \operatorname{sh}\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}$$

Premier terme non nul du DL

Théorème 1

On suppose que f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors :

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$
- Au voisinage de a, f est du signe de $x \mapsto a_p(x-a)^p$

Exemple 4 : Equivalent

$$u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

Exemple 5 : Etudier la limite en 0

a) $g(x) = \dfrac{x(1+\cos x) - 2\tan x}{x^5}$

b) $h(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$

c) $k(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sin^3 x} - \dfrac{\sin x}{\operatorname{sh}^3 x}$

Exemple 6

Etudier la limite de : $u_n = \dfrac{1}{n} \dfrac{\operatorname{sh} \frac{1}{n}}{\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1}$

Exemple 7

Etudier la limite en 1 de : $\varphi(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{\ln(x) - \ln(2-x)}$

Exemple 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in I$ un point intérieur à I.
Etudier limite en 0 de :

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

2 Développements limités et limites

Taylor-Young au point a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Exemple 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in I$ un point intérieur à I.
Etudier limite en 0 de :

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

Taylor-Young au point a :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$$

Exemple 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in I$ un point intérieur à I.
Etudier limite en 0 de :

$$\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Exemple 9

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{ab}$$

II Etude locale d'une courbe Etude asymptotique d'une suite

Pour montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On peut utiliser les DL pour chercher les limites de f et f'.

Exemple 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

① f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$

Pour montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On peut utiliser les DL pour chercher les limites de f et f'.

Exemple 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

① f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$

② f est prolongeable par continuité en 0 :

Pour montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On peut utiliser les DL pour chercher les limites de f et f'.

Exemple 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

1 Développement limité et prolongement $\mathscr{C}^1$

① f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$

② f est prolongeable par continuité en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Pour montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On peut utiliser les DL pour chercher les limites de f et f'.

Exemple 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

1 Développement limité et prolongement $\mathscr{C}^1$

① f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$

② f est prolongeable par continuité en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

③ f est dérivable en 0 et f' y est continue

Pour montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On peut utiliser les DL pour chercher les limites de f et f'.

Exemple 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

1 Développement limité et prolongement $\mathscr{C}^1$

① f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$

② f est prolongeable par continuité en 0 :

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

③ f est dérivable en 0 et f' y est continue

- théorème de la limite de la dérivée

Pour montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$

On peut utiliser les DL pour chercher les limites de f et f'.

Exemple 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

2 Développement limité et tangente

Cadre

f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1\,(x-a) + o(x-a)$$

Rappel : DL_1 **et dérivabilité**

2 Développement limité et tangente

$f(a)$

Cadre

f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1\,(x-a) + o(x-a)$$

Rappel : DL_1 et dérivabilité

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.

2 Développement limité et tangente

Cadre

f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \overset{f(a)}{a_0} + \overset{f'(a)}{a_1}(x-a) + o(x-a)$$

Rappel : DL_1 et dérivabilité

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.
- f est dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

2 Développement limité et tangente

Cadre

f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \underbrace{\boxed{\overbrace{a_0}^{f(a)} + \overbrace{a_1}^{f'(a)}\,(x-a)}}_{\text{Equation de la tangente en } a} + o(x-a)$$

Rappel : DL_1 **et dérivabilité**

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.
- f est dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

2 Développement limité et tangente

Cadre

f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \underbrace{\boxed{\overbrace{a_0}^{f(a)} + \overbrace{a_1}^{f'(a)}\,(x-a)}}_{\text{Equation de la tangente en } a} + o(x-a)$$

Rappel : DL_1 et dérivabilité

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.
- f est dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

Exercice 0

Démontrer les deux points ci-dessus.

2 Développement limité et tangente

Cadre

f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \underbrace{\boxed{\overbrace{a_0}^{f(a)} + \overbrace{a_1}^{f'(a)}\,(x-a)}}_{\text{Equation de la tangente en } a} + o(x-a)$$

Rappel : DL_1 et dérivabilité

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.
- f est dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

Exemple 2 : Point d'inflexion

Etudier localement au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$

2 Développement limité et tangente

Cadre

f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \boxed{\overset{f(a)}{a_0} + \overset{f'(a)}{a_1}\,(x-a)} + o(x-a)$$

Equation de la tangente en a

Rappel : DL_1 et dérivabilité

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.
- f est dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

prolongement par continuité, dérivabilité en 0,
eqn de la tangente en 0, position relative au vois. de 0

Exemple 2 : Point d'inflexion

Etudier localement au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$

2 Développement limité et tangente

Cadre

f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et admet en a le DL_1 :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \underbrace{\boxed{\overset{f(a)}{a_0} + \overset{f'(a)}{a_1}(x-a)}}_{\text{Equation de la tangente en } a} + o(x-a)$$

Rappel : DL_1 et dérivabilité

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.
- f est dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

Exemple 3 : Cas où $a_1 = 0$, extremum local ?

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch} x}{\cos x}$ a un minimum local en 0

3 Asymptotes (obliques) en $\pm\infty$

Définition 1

La droite d'équation $y = ax + b$ est dite *asymptote à* $\mathscr{C}_f$ *en* $+\infty$ si :

3 Asymptotes (obliques) en $\pm\infty$

Définition 1

La droite d'équation $y = ax + b$ est dite *asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$* si :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + o(1)$$

3 Asymptotes (obliques) en $\pm\infty$

Définition 1

La droite d'équation $y = ax + b$ est dite *asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$* si :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} ax + b + o(1)$$

SF 13 : Méthode pour rechercher une asymptote

- On effectue un DL_n de $g : h \mapsto hf(\frac{1}{h})$ en 0 avec $n \geq 2$
- On « revient » à x en posant « $h = \frac{1}{x}$ »

3 Asymptotes (obliques) en $\pm\infty$

Définition 1

La droite d'équation $y = ax + b$ est dite *asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$* si :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + o(1)$$

SF 13 : Méthode pour rechercher une asymptote

- On effectue un DL_n de $g : h \mapsto hf(\frac{1}{h})$ en 0 avec $n \geq 2$
- On « revient » à x en posant « $h = \frac{1}{x}$ »

Exemple 4

Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x}$ possède une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position relative en $+\infty$.

4 Comportement asymptotique de suites

Théorème 1 : Factorielle et suites géométriques

Pour tout $q \in \mathbb{R}$:

4 Comportement asymptotique de suites

Théorème 1 : Factorielle et suites géométriques

Pour tout $q \in \mathbb{R}$: $\quad q^n = o(n!)$

4 Comportement asymptotique de suites

Théorème 1 : Factorielle et suites géométriques

Pour tout $q \in \mathbb{R}$: $\quad q^n = o(n!)$

Exercice 1

Démontrer ce résultat.

Théorème 2 : Formule de Stirling (admise)

4 Comportement asymptotique de suites

Théorème 2 : Formule de Stirling (admise)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

4 Comportement asymptotique de suites

Théorème 2 : Formule de Stirling (admise)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

Exemple 5

Déterminer un équivalent de $\dbinom{2n}{n}$.

Développement asymptotique d'une suite implicite

Exemple 6

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $e^x + x - n = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution notée u_n
2. Montrer que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
3. Montrer que $u_n \sim \ln n$
4. Montrer : $$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Développement asymptotique d'une suite implicite

Existence de u_n

Exemple 6

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $e^x + x - n = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution notée u_n
2. Montrer que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
3. Montrer que $u_n \sim \ln n$
4. Montrer : $$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Développement asymptotique d'une suite implicite

Existence de u_n

Exemple 6

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $e^x + x - n = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution notée u_n

   limite

2. Montrer que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
3. Montrer que $u_n \sim \ln n$
4. Montrer : $$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Développement asymptotique d'une suite implicite

Existence de u_n

Exemple 6

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $e^x + x - n = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution notée u_n

limite

2. Montrer que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Vitesse de convergence :
$u_n = \ln n + o(\ln n)$

3. Montrer que $u_n \sim \ln n$

4. Montrer : $$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Développement asymptotique d'une suite implicite

Existence de u_n

Exemple 6

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $e^x + x - n = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution notée u_n

limite

2. Montrer que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Vitesse de convergence : $u_n = \ln n + o(\ln n)$

3. Montrer que $u_n \sim \ln n$

4. Montrer : $$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

développement asymptotique à deux termes

Développement asymptotique d'une suite implicite

Existence de u_n

Exemple 6

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $e^x + x - n = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution notée u_n

limite

2. Montrer que : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Vitesse de convergence : $u_n = \ln n + o(\ln n)$

3. Montrer que $u_n \sim \ln n$

4. Montrer : $$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Bonus – trouver a tel que :

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + a\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$$