Analyse asymptotique

Chapitre 19.1

I Négligeabilité, domination

1 Définitions

Définition 1

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si :

1 Définitions

Définition 1

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

1 Définitions

Définition 1

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

  On note : $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

1 Définitions

Définition 1

f est un « petit o » de g en a

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

  On note : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

1 Définitions

Définition 1

f est un « petit o » de g en a

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

  On note : $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

- On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si :

1 Définitions

Définition 1

f est un « petit o » de g en a

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$

  On note : $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

- On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si : $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

1 Définitions

Définition 1

f est un « petit o » de g en a

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

  On note : $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

- On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si : $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

  On note : $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$.

1 Définitions

Définition 1

f est un « petit o » de g en a

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

  On note : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

- On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si : $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

  On note : $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$.

f est un « grand O » de g en a

1 Définitions

Définition 1

f est un « petit o » de g en a

- f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

  On note : $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.

- On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si : $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

  On note : $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$.

f est un « grand O » de g en a

Exemple 1 : Justifier

a) $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$ b) $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$ c) $\dfrac{\ln x}{x^3} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

d) $\dfrac{1+\cos x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ e) $2^n \underset{n\to+\infty}{=} o(3^n)$

1 Définitions

Théorème 1 : Croissances comparées en $+\infty$

- Si $\alpha < \beta$: $\qquad x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=}$
- Si $\alpha > 0$: $\qquad (\ln x)^{\beta} \underset{x\to+\infty}{=}$
- Si $\beta > 0$: $\qquad x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=}$

1 Définitions

Théorème 1 : Croissances comparées en $+\infty$

- Si $\alpha < \beta$: $\quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$
- Si $\alpha > 0$: $\quad (\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=}$
- Si $\beta > 0$: $\quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=}$

1 Définitions

Théorème 1 : Croissances comparées en $+\infty$

- Si $\alpha < \beta$: $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$
- Si $\alpha > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\beta > 0$: $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=}$

1 Définitions

Théorème 1 : Croissances comparées en $+\infty$

- Si $\alpha < \beta$: $\quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$
- Si $\alpha > 0$: $\quad (\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\beta > 0$: $\quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$

1 Définitions

Théorème 1 : Croissances comparées en $+\infty$

- Si $\alpha < \beta$: $\quad x^{\alpha} \underset{x \to +\infty}{=} o(x^{\beta})$
- Si $\alpha > 0$: $\quad (\ln x)^{\beta} \underset{x \to +\infty}{=} o(x^{\alpha})$
- Si $\beta > 0$: $\quad x^{\alpha} \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\beta x})$

Théorème 2 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $\quad x^{\beta} \underset{x \to 0}{=}$
- Si $\alpha > 0$: $\quad |\ln x|^{\beta} \underset{x \to 0}{=}$

1 Définitions

Théorème 1 : Croissances comparées en $+\infty$

- Si $\alpha < \beta$: $\quad x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$
- Si $\alpha > 0$: $\quad (\ln x)^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\beta > 0$: $\quad x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\beta x})$

Théorème 2 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $\quad x^\beta \underset{x \to 0}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\alpha > 0$: $\quad |\ln x|^\beta \underset{x \to 0}{=}$

1 Définitions

Théorème 1 : Croissances comparées en $+\infty$

- Si $\alpha < \beta$: $$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$$
- Si $\alpha > 0$: $$(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$$
- Si $\beta > 0$: $$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$$

Théorème 2 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $$x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$$
- Si $\alpha > 0$: $$|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $\quad x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\alpha > 0$: $\quad |\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

Théorème 4 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $\quad f_1 \underset{a}{=} o(g) \quad$ et $\quad f_2 \underset{a}{=} o(g) \quad$ alors :

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\alpha > 0$: $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

Théorème 4 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\alpha > 0$: $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

Théorème 4 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$:

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\alpha > 0$: $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

Théorème 4 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$: $f \underset{a}{=} o(h)$.

Théorème 3 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x \to 0}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\alpha > 0$: $|\ln x|^\beta \underset{x \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

Théorème 4 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$: $f \underset{a}{=} o(h)$.
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$:

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $\quad x^{\beta} \underset{x\to 0}{=} o(x^{\alpha})$
- Si $\alpha > 0$: $\quad |\ln x|^{\beta} \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\alpha}}\right)$

Théorème 4 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $\quad f_1 \underset{a}{=} o(g) \quad$ et $\quad f_2 \underset{a}{=} o(g) \quad$ alors : $\qquad \alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g).$
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g) \quad$ et si $\quad g \underset{a}{=} o(h)$: $\qquad f \underset{a}{=} o(h).$
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1) \quad$ et $\quad f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$: $\qquad f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Croissances comparées en 0

- Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$
- Si $\alpha > 0$: $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$

Théorème 4 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$: $f \underset{a}{=} o(h)$.
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$: $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$
4. *Produit par une fonction.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$: $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

même résultats en remplaçant « o » par « O »

Théorème 3 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$: $f \underset{a}{=} o(h)$.
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$: $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$
4. *Produit par une fonction.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$: $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

même résultats en remplaçant « o » par « O »

Théorème 3 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$: $f \underset{a}{=} o(h)$.
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$: $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$
4. *Produit par une fonction.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$: $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

Exercice 1

Démontrer les points 1 et 2 du théorème.

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$: $f \underset{a}{=} o(h)$.
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$: $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$
4. *Produit par une fonction.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$: $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

Exemple 2

$3 + x^2 + x^3 + 5\ln x + x^{103} \underset{x\to+\infty}{=} o$

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$: $f \underset{a}{=} o(h)$.
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$: $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$
4. *Produit par une fonction.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$: $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

Exemple 2

$3 + x^2 + x^3 + 5\ln x + x^{103} \underset{x \to +\infty}{=}$

$o(x^{104})$
$o(e^x)$
...

2 Règles de calcul

Théorème 3 : Opérations sur les o ou les O

1. *Combinaisons linéaires.*
   Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors : $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$.
2. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$: $f \underset{a}{=} o(h)$.
3. *Produit.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$: $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$
4. *Produit par une fonction.* Si $f \underset{a}{=} o(g)$: $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

Exemple 2

$3 + x^2 + x^3 + 5\ln x + x^{103} \underset{x\to+\infty}{=}$

$o(x^{104})$
$o(e^x)$
...

Exemple 3 : admis : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ **et** $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$

Que dire de : a) $e^x + 2\sin x$? b) $e^x \sin x$?

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff$$

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o$$

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

Exercice 2

Démontrer l'équivalence en revenant à la définition de « o ».

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

Remarque

$f(x) \underset{x \to a}{=} O(1)$ signifie :

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

Remarque

$f(x) \underset{x \to a}{=} O(1)$ signifie : f est bornée au voisinage de a.

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

Remarque

$f(x) \underset{x \to a}{=} O(1)$ signifie : f est bornée au voisinage de a.

Théorème 5 : Changement de variable

Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et $u(t) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} a$:

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

Remarque

$f(x) \underset{x \to a}{=} O(1)$ signifie : f est bornée au voisinage de a.

Théorème 5 : Changement de variable

Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et $u(t) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} a$: $f(u(t)) \underset{t \to \alpha}{=} o\Big(g(u(t))\Big)$

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

Remarque

$f(x) \underset{x \to a}{=} O(1)$ signifie : f est bornée au voisinage de a.

Théorème 5 : Changement de variable

Si $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ et $u(t) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} a$: $f(u(t)) \underset{t \to \alpha}{=} o\Big(g(u(t))\Big)$

Exercice 3

Démontrer le théorème en utilisant une composition de limites.

2 Règles de calcul

Théorème 4 : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$$

Remarque

$f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$ signifie : f est bornée au voisinage de a.

Théorème 5 : Changement de variable

Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $u(t) \underset{t\to\alpha}{\longrightarrow} a$: $f(u(t)) \underset{t\to\alpha}{=} o\Big(g(u(t))\Big)$

Exemple 4 : Admis : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$

Que dire de : a) $\sin(t^2)$? b) $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$? c) $\sin(e^t)$?

II Equivalence

1 Définition

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si :

1 Définition

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$

1 Définition

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

1 Définition

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

1 Définition

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

1 Définition

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff$$

1 Définition

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

1 Définition

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

Définition 1

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exercice 1

Démontrer le théorème précédent.

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim}$
- $x^2 + x \underset{x\to 0}{\sim}$
- $e^{4x} - x^{20} + (\ln(x))^{83} \underset{x\to+\infty}{\sim}$
- $n + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim}$

1 Définition

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(x^2)} \underset{x \to +\infty}{\sim}$
- $x^2 + x \underset{x \to 0}{\sim}$
- $e^{4x} - x^{20} + (\ln(x))^{83} \underset{x \to +\infty}{\sim}$
- $n + \ln n \underset{n \to +\infty}{\sim}$

1 Définition

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(x^2)} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$
- $x^2 + x \underset{x \to 0}{\sim}$
- $e^{4x} - x^{20} + (\ln(x))^{83} \underset{x \to +\infty}{\sim}$
- $n + \ln n \underset{n \to +\infty}{\sim}$

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$

On note : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x)} + x \underset{x\to 0}{\sim}$
- $e^{4x} - x^{20} + (\ln(x))^{83} \underset{x\to+\infty}{\sim}$
- $n + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim}$

1 Définition

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$

On note : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x)} + x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} - x^{20} + (\ln(x))^{83} \underset{x\to+\infty}{\sim}$
- $n + \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim}$

1 Définition

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $\quad f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x)) \quad$ ou $\quad f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(x^2)} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(x)} + x \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{- x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x \to +\infty}{\sim}$
- $n + \ln n \underset{n \to +\infty}{\sim}$

1 Définition

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(x^2)} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(x)} + x \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{- x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{4x}$
- $n + \ln n \underset{n \to +\infty}{\sim}$

1 Définition

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x)} + x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{-x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{4x}$
- $n + \underbrace{\ln n}_{=o(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim}$

1 Définition

Définition 1

La relation « $\underset{a}{\sim}$ » est une relation d'équivalence

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$

On note : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

Théorème 1 : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Exemple 1

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(x^2)} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(x)} + x \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{- x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x \to +\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{4x}$
- $n + \underbrace{\ln n}_{= o(n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} n$

Exemple 2

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x)} + x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{-x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{4x}$
- $n + \underbrace{\ln n}_{=o(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$:
- En 0 :

Exemple 2

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x)} + x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{-x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{4x}$
- $n + \underbrace{\ln n}_{=o(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 :

Exemple 2

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x)} + x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{- x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{4x}$
- $n + \underbrace{\ln n}_{= o(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$

1 Définition

Exemple 2

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x)} + x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{- x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{4x}$
- $n + \underbrace{\ln n}_{=o(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors :

1 Définition

Exemple 2

- $x^2 + \underbrace{x}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- $\underbrace{x^2}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(x)} + x \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^{4x} \underbrace{-x^{20} + (\ln(x))^{83}}_{\underset{x\to+\infty}{=} o(e^{4x})} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{4x}$
- $n + \underbrace{\ln n}_{=o(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : f et g ont le même signe au voisinage de a.

1 Définition

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : f et g ont le même signe au voisinage de a.

Exercice 2 : Démonstration dans le cas des suites

On suppose que $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

1 Définition

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : f et g ont le même signe au voisinage de a.

Théorème 3 : Equivalence et limite

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ alors :

1 Définition

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : f et g ont le même signe au voisinage de a.

Théorème 3 : Equivalence et limite

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ alors : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

1 Définition

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : f et g ont le même signe au voisinage de a.

Théorème 3 : Equivalence et limite

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ alors : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 4 : Equivalent par encadrement

Si : i) ii)

Alors :

1 Définition

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1} x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : f et g ont le même signe au voisinage de a.

Théorème 3 : Equivalence et limite

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ alors : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 4 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii)

Alors :

1 Définition

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : f et g ont le même signe au voisinage de a.

Théorème 3 : Equivalence et limite

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ alors : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 4 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors :

1 Définition

Remarque

Pour un polynôme $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$:

- En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- En 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$

Théorème 2 : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : f et g ont le même signe au voisinage de a.

Théorème 3 : Equivalence et limite

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ alors : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 4 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.

2 Règles de calcul

Théorème 5 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.

Théorème 6

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors :

Théorème 5 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.

Théorème 6

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.

2 Règles de calcul

Théorème 5 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.

Théorème 6

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors :

2 Règles de calcul

Théorème 5 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.

Théorème 6

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$

2 Règles de calcul

Théorème 5 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.

Théorème 6

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors :

2 Règles de calcul

Théorème 5 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.

Théorème 6

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$

2 Règles de calcul

Théorème 5 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h$.

Théorème 6

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors :

2 Règles de calcul

Théorème 5 : Equivalent par encadrement

Si : i) $f \leq g \leq h$ au voisinage de a ii) $f \underset{a}{\sim} h$

Alors : $g \underset{a}{\sim} f \underset{a}{\sim} h.$

Théorème 6

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h.$
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$

2 Règles de calcul

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$
5. *Equivalence avec une constante.* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow$

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$
5. *Equivalence avec une constante.* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

2 Règles de calcul

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$
5. *Equivalence avec une constante.* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

$\ell \neq 0$

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$
5. *Equivalence avec une constante.* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ $\ell \neq 0$
6. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{t \to \alpha} u(t) = a$:

2 Règles de calcul

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$

$\ell \neq 0$

5. *Equivalence avec une constante.* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$
6. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{t \to \alpha} u(t) = a$: $f(u(t)) \underset{t \to \alpha}{\sim} g(u(t))$

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$
5. *Equivalence avec une constante.* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ $\qquad \ell \neq 0$
6. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = a$: $f(u(t)) \underset{t\to\alpha}{\sim} g(u(t))$
7. *Substitution* . Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors :

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$
5. *Equivalence avec une constante.* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

$\ell \neq 0$

6. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{t \to \alpha} u(t) = a$: $f(u(t)) \underset{t \to \alpha}{\sim} g(u(t))$
7. *Substitution* . Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{=} o(h)$

Théorème 5

1. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
4. *Puissances d'exposant constant.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $f^{\alpha} \underset{a}{\sim} g^{\alpha}$
5. *Equivalence avec une constante.* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$

$\ell \neq 0$

6. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = a$: $f(u(t)) \underset{t\to\alpha}{\sim} g(u(t))$
7. *Substitution* . Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{=} o(h)$

Exemple 2 : Admis : $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ **et** $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$

Que dire de : a) $e^{\sin x}$? b) e^{e^x} ?

☢ Propriétés FAUSSES ☢

1. *Somme.* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$

☢ Propriétés FAUSSES ☢

1. *Somme.* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$
2. *Composition.* $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $\phi \circ f \underset{a}{\sim} \phi \circ g$

   En particulier : $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $e^f \underset{a}{\sim} e^g$

2 Règles de calcul

☢ Propriétés FAUSSES ☢

1. *Somme.* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$
2. *Composition.* $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $\phi \circ f \underset{a}{\sim} \phi \circ g$

   En particulier : $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $e^f \underset{a}{\sim} e^g$
3. *Puissances d'exposant non constant.*

   Eviter le célèbre : $1 + \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} 1$ ~~donc~~ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cancel{\underset{x \to +\infty}{\sim}} 1^x = 1$.

2 Règles de calcul

☢ Propriétés FAUSSES ☢

1. *Somme.* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$
2. *Composition.* $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $\phi \circ f \underset{a}{\sim} \phi \circ g$

   En particulier : $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\Longrightarrow}$ $e^f \underset{a}{\sim} e^g$
3. *Puissances d'exposant non constant.*

   Eviter le célèbre : $1 + \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} 1$ ~~donc~~ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cancel{\underset{x \to +\infty}{\sim}} 1^x = 1.$

Exercice 3

Donner un contre-exemple pour 1 et 2 et prouver que 3 est fausse.

SF 5 : Lever une forme indéterminée « quotient » :

Exemple 3 : Calculer

a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x^5 + x^2 + 2}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{e^{1/x}}{x^2}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$

d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x}$

SF 5 : Lever une forme indéterminée « quotient » :

Exemple 3 : Calculer

$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+x^2+1}{x^5+x^2+2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{e^{1/x}}{x^2}}-1}{\ln(1+\frac{1}{x^2})}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

SF 5 : Lever une forme indéterminée « quotient » :

Exemple 3 : Calculer

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+x^2+1}{x^5+x^2+2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$

$e^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{e^{1/x}}{x^2}}-1}{\ln(1+\frac{1}{x^2})}$

- $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

SF 5 : Lever une forme indéterminée « quotient » :

Exemple 3 : Calculer

a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x^5 + x^2 + 2}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$

$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$

c) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{e^{1/x}}{x^2}} - 1}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}$

- $(1+u)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{2} u$
- $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{\sim} u$

d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

III Développements limités en un point

Exemple 1 : Exemple introductif

L'exponentielle admet en 0 les développements limités suivants :

a) $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ (Ordre 1)

b) $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ (Ordre 2)

c) $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ (Ordre 3)

▸ Figure

1 Généralités

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

1 Généralités

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \; + \; o((x-a)^n)$$

1 Généralités

Définition 1

On approche f au voisinage de a

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

1 Généralités

Définition 1

On approche f au voisinage de a

On approche f par un polynôme P_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

1 Généralités

Définition 1

On approche f au voisinage de a

On approche f par un polynôme P_n

erreur d'autant plus petite que n est grand

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\Big((x-a)^n\Big)$$

Définition 1

On approche f au voisinage de a

On approche f par un polynôme P_n

erreur d'autant plus petite que n est grand

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un développement limité *d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Interprétation heuristique

1 Généralités

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un développement limité d'ordre n s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \; + \; o((x-a)^n)$$

On approche f au voisinage de a

On approche f par un polynôme P_n

erreur d'autant plus petite que n est grand

Interprétation heuristique

$o((x-a)^n)$ est l'erreur commise en approchant f par P_n

1 Généralités

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un développement limité *d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

On approche f au voisinage de a

On approche f par un polynôme P_n

erreur d'autant plus petite que n est grand

Interprétation heuristique

$o((x-a)^n)$ est l'erreur commise en approchant f par P_n

Rappel Si f est dérivable en $a \in D$ elle admet le DL_1

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \; + \; o((x-a)^n)$$

Interprétation heuristique

$o((x-a)^n)$ est l'erreur commise en approchant f par P_n

Rappel Si f est dérivable en $a \in D$ elle admet le DL_1

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)}$$

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \; + \; o((x-a)^n)$$

On approche f au voisinage de a

On approche f par un polynôme P_n

erreur d'autant plus petite que n est grand

Interprétation heuristique

$o((x-a)^n)$ est l'erreur commise en approchant f par P_n

Rappel Si f est dérivable en $a \in D$ elle admet le DL_1

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)}$$

réciproque vraie :

1 Généralités

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \; + \; o((x-a)^n)$$

On approche f au voisinage de a

On approche f par un polynôme P_n

erreur d'autant plus petite que n est grand

Interprétation heuristique

$o((x-a)^n)$ est l'erreur commise en approchant f par P_n

Rappel Si f est dérivable en $a \in D$ elle admet le DL_1

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)}$$

être dérivable en a
$\Updownarrow$
posseder un DL_1 en a

1 Généralités

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un développement limité d'ordre n s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

On approche f au voisinage de a

On approche f par un polynôme P_n

erreur d'autant plus petite que n est grand

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k \; + \; o((x-a)^n)$$

Interprétation heuristique

$o((x-a)^n)$ est l'erreur commise en approchant f par P_n

Rappel Si f est dérivable en $a \in D$ elle admet le DL_1

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)}$$

être dérivable en a

$\Updownarrow$

posseder un DL_1 en a

Exemple 2 : Montrer

a) $\dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$ b) $\dfrac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

2 Propriétés des développements limités

Théorème 1 : Unicité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f possède en a un DL_n, alors :

2 Propriétés des développements limités

Théorème 1 : Unicité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f possède en a un DL_n, alors : il est unique

2 Propriétés des développements limités

i.e. la liste des coefficients $(a_0, \ldots, a_n)$ est unique

Théorème 1 : Unicité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f possède en a un DL_n, alors : il est unique

2 Propriétés des développements limités

i.e. la liste des coefficients $(a_0, \ldots, a_n)$ est unique

Théorème 1 : Unicité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f possède en a un DL_n, alors : il est unique

Exercice 1

Démontrer ce théorème.

i.e. la liste des coefficients $(a_0, \ldots, a_n)$ est unique

Théorème 1 : Unicité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f possède en a un DL_n, alors : il est unique

Exercice 1

Démontrer ce théorème.

Conséquence

En cas d'existence, le DL_n en 0 d'une fonction paire ne comporte que des puissances paires.

i.e. la liste des coefficients $(a_0, \dots, a_n)$ est unique

Théorème 1 : Unicité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f possède en a un DL_n, alors : il est unique

Exercice 1

Démontrer ce théorème.

Conséquence

En cas d'existence, le DL_n en 0 d'une fonction paire ne comporte que des puissances paires.

Exercice 2

Démontrer la conséquence.

Théorème 2 : Primitivation

Si f' admet en a le DL_{n-1} :

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^{n-1}\right)$$

Alors f admet en a le DL_n :

2 Propriétés des développements limités

Théorème 2 : Primitivation

Si f' admet en a le DL_{n-1} :

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$$

Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^n)$$

Théorème 2 : Primitivation

Si f' admet en a le DL_{n-1} :

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$$

Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^n)$$

on primitive
terme à terme

Théorème 2 : Primitivation

Si f' admet en a le DL_{n-1} :

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$$

Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^n)$$

on primitive terme à terme

on primitive aussi le « o »

Théorème 2 : Primitivation

Si f' admet en a le DL_{n-1} :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$$

Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^n)$$

Constante de primitivation

on primitive terme à terme

on primitive aussi le « o »

Théorème 2 : Primitivation

Si f' admet en a le DL_{n-1} :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$$

Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^n)$$

Constante de primitivation

on primitive terme à terme

on primitive aussi le « o »

Exercice 3

Démontrer le théorème.

2 Propriétés des développements limités

Théorème 2 : Primitivation

Si f' admet en a le DL_{n-1} :

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$$

Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \underbrace{f(a)}_{\text{Constante de primitivation}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}}_{\text{on primitive terme à terme}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{on primitive aussi le « } o \text{ »}}$$

Exemple 3

Montrer : a) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$

Théorème 2 : Primitivation

Si f' admet en a le DL_{n-1} :

$$f'(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o((x-a)^{n-1})$$

Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \underbrace{f(a)}_{\text{Constante de primitivation}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}}_{\text{on primitive terme à terme}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{on primitive aussi le « } o \text{ »}}$$

Exemple 3

Montrer : b) $\operatorname{Arctan} x \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$

2 Propriétés des développements limités

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D. Alors f admet en a le DL_n :

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D. Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Résultat d'existence

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D. Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Résultat d'existence
« Justifier que f possède un DL_n en a »

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D. Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

2 Propriétés des développements limités

Résultat d'existence
« Justifier que f possède un DL_n en a »

Réponse : « f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D donc possède en a un DL_n d'après la formule de Taylor-Young »

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D. Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

2 Propriétés des développements limités

Résultat d'existence
« Justifier que f possède un DL_n en a »

Réponse : « f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D donc possède en a un DL_n d'après la formule de Taylor-Young »

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D. Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Exercice 4

Démontrer le théorème par récurrence sur n.

Résultat d'existence
« Justifier que f possède un DL_n en a »

Réponse : « f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D donc possède en a un DL_n d'après la formule de Taylor-Young »

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D. Alors f admet en a le DL_n :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Exemple 4 : Calculer le développement limité en 0 de

a) exp à l'ordre n b) cos à l'ordre $2n$ c) tan à l'ordre 3

IV Opérations sur les développements limités

SF 2 : Obtenir un DL_n de $\lambda f + \mu g$

On combine les DL_n de f et g.

Exemple 1 : Calculer un développement limité à l'ordre 3 en 0

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-x} - e^x$$

SF 3 : Obtenir un DL_n de fg

On multiplie les DL_n de f et g.

Exemple 2

1. Donner un DL_3 en 0 de : $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^2}$.
2. Donner un DL_2 en 0 de : $\varphi(x) = e^x \ln(1+x)$.

2 Produit

En pratique : le « gain d'ordre »

Lorsqu'on cherche un développement limité en 0 à l'ordre n de fg :

- si f admet un DL_n de la forme $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + \dots$

2 Produit

En pratique : le « gain d'ordre »

Le DL de f
« démarre par x^p »

Lorsqu'on cherche un développement limité en 0 à l'ordre n de fg :

- si f admet un DL_n de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + \ldots$

2 Produit

Le DL de f
« démarre par x^p »

En pratique : le « gain d'ordre »

Lorsqu'on cherche un développement limité en 0 à l'ordre n de fg :

- si f admet un DL_n de la forme $f(x) \underset{x \to 0}{=} a_p x^p + \dots$
  il suffit de développer g à l'ordre $n - p$

2 Produit

Le DL de f
« démarre par x^p »

En pratique : le « gain d'ordre »

Lorsqu'on cherche un développement limité en 0 à l'ordre n de fg :

- si f admet un DL_n de la forme $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + \dots$

  il suffit de développer g à l'ordre $n-p$
- si g admet un DL_n de la forme $\quad g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q x^q + \dots$

Le DL de f
« démarre par x^p »

En pratique : le « gain d'ordre »

Lorsqu'on cherche un développement limité en 0 à l'ordre n de fg :

- si f admet un DL_n de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + \dots$
  il suffit de développer g à l'ordre $n - p$
- si g admet un DL_n de la forme $g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q x^q + \dots$

Le DL de f
« démarre par x^p »

Le DL de f
« démarre par x^p »

En pratique : le « gain d'ordre »

Lorsqu'on cherche un développement limité en 0 à l'ordre n de fg :

- si f admet un DL_n de la forme $f(x) \underset{x \to 0}{=} a_p x^p + \dots$
  il suffit de développer g à l'ordre $n - p$
- si g admet un DL_n de la forme $g(x) \underset{x \to 0}{=} b_q x^q + \dots$
  il suffit de développer f à l'ordre $n - q$

Le DL de f
« démarre par x^p »

En pratique : le « gain d'ordre »

Le DL de f
« démarre par x^p »

Lorsqu'on cherche un développement limité en 0 à l'ordre n de fg :

- si f admet un DL_n de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + \dots$
  il suffit de développer g à l'ordre $n-p$
- si g admet un DL_n de la forme $g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q x^q + \dots$
  il suffit de développer f à l'ordre $n-q$

Le DL de f
« démarre par x^p »

Exemple 3

2. Déterminer un DL_6 en 0 de $\psi(x) = (\operatorname{ch} x - 1)\ln(1+x)$.

SF 4 : Obtenir un DL_n en 0 d'une composée

Exemple 4 : Composition

Déterminer un DL_3 en 0 de : $\quad \varphi(x) = e^{\sin x}$.

3 Composition et quotients

En pratique : pour obtenir un DL_n de $\frac{1}{f}$

On essaie de se ramener à $\dfrac{1}{1+u(x)}$ avec $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Exemple 5

1. Déterminer un DL_4 en 0 de : $\quad \varphi(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.
2. Déterminer un DL_5 en 0 de : $\quad \tan x$.
3. Déterminer un DL_3 de : $\quad \psi(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

3 Composition et quotients

En pratique : obtenir un DL_n en 0 de $\frac{f}{g}$ lorsque $g(0) = 0$

Si : $\quad g(x) \underset{x \to 0}{=} b_q x^q + \ldots$

3 Composition et quotients

En pratique : obtenir un DL_n en 0 de $\frac{f}{g}$ lorsque $g(0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{1.}{=} \frac{a_q x^q + \cdots + o(x^{n+q})}{b_q x^q + \cdots + o(x^{n+q})}$$

Si : $\quad g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q x^q + \ldots$

1. Développer f et g à l'ordre $n+q$.

3 Composition et quotients

En pratique : obtenir un DL_n en 0 de $\frac{f}{g}$ lorsque $g(0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{1.}{=} \frac{a_q x^q + \cdots + o(x^{n+q})}{b_q x^q + \cdots + o(x^{n+q})}$$

$$\underset{2.}{=} \frac{a_q + \cdots + o(x^n)}{b_q + \cdots + o(x^n)}$$

Si : $\quad g(x) \underset{x \to 0}{=} b_q x^q + \ldots$

1. Développer f et g à l'ordre $n + q$.
2. Simplifier le quotient par x^q

3 Composition et quotients

En pratique : obtenir un DL_n en 0 de $\frac{f}{g}$ lorsque $g(0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{1.}{=} \frac{a_q x^q + \cdots + o(x^{n+q})}{b_q x^q + \cdots + o(x^{n+q})} \underset{2.}{=} \frac{a_q + \cdots + o(x^n)}{b_q + \cdots + o(x^n)} = \frac{a_q + \cdots + o(x^n)}{b_q(1 + \cdots + o(x^n))}$$

Si : $\quad g(x) \underset{x \to 0}{=} b_q x^q + \ldots$

1. Développer f et g à l'ordre $n+q$.
2. Simplifier le quotient par x^q

On est ramené à : $\dfrac{N(x)}{1+u(x)} = N(x) \times \dfrac{1}{1+u(x)}$.

En pratique : obtenir un DL_n en 0 de $\frac{f}{g}$ lorsque $g(0) = 0$

Si : $\quad g(x) \underset{x\to 0}{=} b_q x^q + \ldots$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{1.}{=} \frac{a_q x^q + \cdots + o(x^{n+q})}{b_q x^q + \cdots + o(x^{n+q})} \underset{2.}{=} \frac{a_q + \cdots + o(x^n)}{b_q + \cdots + o(x^n)} = \frac{a_q + \cdots + o(x^n)}{b_q(1 + \cdots + o(x^n))}$$

1. Développer f et g à l'ordre $n+q$.
2. Simplifier le quotient par x^q

On est ramené à : $\dfrac{N(x)}{1+u(x)} = N(x) \times \dfrac{1}{1+u(x)}$.

Exemple 6

1. Déterminer un DL_4 en 0 de : $\quad \varphi(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{\sin(x^2)}$.
2. Déterminer un DL_3 en 0 de : $\quad \psi(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\ln(1+x)}$.

SF 7 : On « pose » $g(h) = f(a+h)$

- On effectue un DL_n en 0 de $g : h \mapsto f(a+h)$
- On « revient » à x en posant « $h = x - a$ »

Exemple 7

1. Déterminer un DL_3 au point $\frac{\pi}{3}$ de : $\cos x$.
2. Déterminer un DL_2 au point 2 de : $\ln x$.