Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ Fractions rationnelles

Chapitre 18

I Factorisation irréductible

1 Polynômes irréductibles

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :

1 Polynômes irréductibles

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :
ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

1 Polynômes irréductibles

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :
ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

diviseurs triviaux de P

1 Polynômes irréductibles

à une constante multiplicative non nulle près

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si : ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

diviseurs triviaux de P

1 Polynômes irréductibles

à une constante multiplicative non nulle près
(les diviseurs sont les λ et les λP pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$)

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :
ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

diviseurs triviaux de P

1 Polynômes irréductibles

à une constante multiplicative non nulle près
(les diviseurs sont les λ et les λP pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$)

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :
ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

diviseurs triviaux de P

Exemple 1

a) $P = X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

b) $P = 2X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

1 Polynômes irréductibles

à une constante multiplicative non nulle près
(les diviseurs sont les λ et les λP pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$)

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :
ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

diviseurs triviaux de P

Exemple 2

1. Montrer que tout polynôme de degré 1 est irréductible.
2. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 à discriminant strictement négatif est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

1 Polynômes irréductibles

à une constante multiplicative non nulle près
(les diviseurs sont les λ et les λP pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$)

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :
ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

diviseurs triviaux de P

Remarque

Les polynômes irréductibles sont les analogues dans $\mathbb{K}[X]$ des nombre premiers dans $\mathbb{Z}$.

1 Polynômes irréductibles

à une constante multiplicative non nulle près
(les diviseurs sont les λ et les λP pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$)

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :
ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

diviseurs triviaux de P

Remarque

Les polynômes irréductibles sont les analogues dans $\mathbb{K}[X]$ des nombre premiers dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 1 : Lemme d'euclide

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible et soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

1 Polynômes irréductibles

à une constante multiplicative non nulle près
(les diviseurs sont les λ et les λP pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$)

Définition 1

Un polynôme P non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si :
ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont 1 et P

diviseurs triviaux de P

Remarque

Les polynômes irréductibles sont les analogues dans $\mathbb{K}[X]$ des nombre premiers dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 1 : Lemme d'euclide

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible et soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
Si : $P \mid AB$ alors : $P \mid A$ ou $P \mid B$.

2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 2 : d'Alembert-Gauss (Rappel)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe. En conséquence tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 2 : d'Alembert-Gauss (Rappel)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe. En conséquence tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, non tous deux nuls.
Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.

2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

SF 6 : Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Si P est de degré n, on cherche ses n racines

comptées avec multiplicité

SF 6 : Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Si P est de degré n, on cherche ses n racines

comptées avec multiplicité

SF 6 : Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Si P est de degré n, on cherche ses n racines

Exemple 3 : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$

a) $P = X^4 + 1$.

b) $Q = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$ (où $n \geq 2$).

comptées avec multiplicité

SF 6 : Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Si P est de degré n, on cherche ses n racines

Exercice 2

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, de même multiplicité.

comptées avec multiplicité

SF 6 : Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Si P est de degré n, on cherche ses n racines

Exercice 2

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, de même multiplicité.

Exemple 4

a) Montrer que j est racine de $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$

b) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

comptées avec multiplicité

SF 6 : Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Si P est de degré n, on cherche ses n racines

Exercice 2

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, de même multiplicité.

Exercice 3 : Bonus

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 3.
Montrer que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

- de polynômes de degré 1

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

- de polynômes de degré 1
- de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

- de polynômes de degré 1
- de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif

SF 7 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

1. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

- de polynômes de degré 1
- de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif

SF 7 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

1. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$
2. On regroupe les facteurs conjugués en utilisant :

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) =$$

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

- de polynômes de degré 1
- de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif

SF 7 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

1. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$
2. On regroupe les facteurs conjugués en utilisant :

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$$

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

- de polynômes de degré 1
- de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif

SF 7 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

1. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$
2. On regroupe les facteurs conjugués en utilisant :

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2$$

Exemple 5 : Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$

a) $P = X^4 + 1$ b) $P = X^5 - 1$ c) $P = X^{2n+1} - 1$

3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 3 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ se factorise en un produit :

- de polynômes de degré 1
- de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif

Exemple 6 : cf. Ex. 85.2, banque INP

Factoriser $P = X^5 - 4X^2 + 3X$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que 1 est racine double.

4 Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème 4

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
   - les polynômes de degré 1
   - les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Théorème 5

Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ est le produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$

4 Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème 4

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
   - les polynômes de degré 1
   - les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

décomposition en facteurs irréductibles

Théorème 5

Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ est le produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$

4 Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème 4

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
2. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
   - les polynômes de degré 1
   - les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

décomposition en facteurs irréductibles

Théorème 5

Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ est le produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$

Exemple 7

On pose $A = 2X(X+1)^2(X+2)^3$ et $B = X^2(X+2)(X^2+X+1)$
Calculer $A \wedge B$.

II Décomposition en éléments simples : la théorie

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

Admis

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

Admis

avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

Admis

avec $P \in \mathbb{K}[X]$
et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ ssi $\quad P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

avec $P \in \mathbb{K}[X]$
et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Admis

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \quad$ ssi $\quad P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

ii) $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$ via l'identification $\quad P = \dfrac{P}{1}$

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

Admis

avec $P \in \mathbb{K}[X]$
et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \quad$ ssi $\quad P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

ii) $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$ via l'identification $\quad P = \dfrac{P}{1}$

iii) ▪ $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}}$ ▪ $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}}$

Admis

avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ ssi $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

ii) $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$ via l'identification $P = \dfrac{P}{1}$

iii)
- $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}}$
- $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}}$

Exemple 1 : Simplifier

a) $F = \dfrac{X}{X(1+X)}$ $\qquad$ b) $G = \dfrac{X^3 - X}{(X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1)}$

Admis

avec $P \in \mathbb{K}[X]$
et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \quad$ ssi $\quad P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

ii) $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$ via l'identification $\quad P = \dfrac{P}{1}$

iii) ▪ $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}}$ ▪ $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}}$

Définition 1

Le degré de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\quad \deg F \underset{\text{déf.}}{=}$

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

Admis

avec $P \in \mathbb{K}[X]$
et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ ssi $\quad P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

ii) $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$ via l'identification $\quad P = \dfrac{P}{1}$

iii) ▪ $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}}$ ▪ $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}}$

Définition 1

Le degré de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\quad \deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

avec $P \in \mathbb{K}[X]$
et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Admis

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \quad$ ssi $\quad P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

ii) $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$ via l'identification $\quad P = \dfrac{P}{1}$

iii)
- $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}}$
- $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}}$

Définition 1

Le degré de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\quad \deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\deg(F+G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
- $\deg(FG) = \deg F + \deg G$

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

avec $P \in \mathbb{K}[X]$
et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Admis

Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ dont tout élément F s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ ssi $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

ii) $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$ via l'identification $P = \dfrac{P}{1}$

iii) ▪ $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}}$ ▪ $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}}$

Ne dépend pas du couple (A, B) choisi

Définition 1

Le degré de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\quad \deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\deg(F+G) \leq \max(\deg F, \deg G)$ ▪ $\deg(FG) = \deg F + \deg G$

2 Zéros et pôles

Ne dépend pas du couple (A, B) choisi

Définition 2

Le degré de $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\deg(F+G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
- $\deg(FG) = \deg F + \deg G$

Définition 3

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *irréductible*

- $a \in \mathbb{K}$ est un zéro de F si :
- $a \in \mathbb{K}$ est un pôle de F si :

2 Zéros et pôles

Ne dépend pas du couple (A, B) choisi

Définition 2

Le degré de $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\quad \deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
- $\deg(FG) = \deg F + \deg G$

$P \wedge Q = 1$

Définition 3

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *irréductible*

- $a \in \mathbb{K}$ est un zéro de F si :
- $a \in \mathbb{K}$ est un pôle de F si :

2 Zéros et pôles

Ne dépend pas du couple (A, B) choisi

Définition 2

Le degré de $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
- $\deg(FG) = \deg F + \deg G$

$P \wedge Q = 1$

Définition 3

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *irréductible*

- $a \in \mathbb{K}$ est un zéro de F si : $P(a) = 0$
- $a \in \mathbb{K}$ est un pôle de F si :

2 Zéros et pôles

Ne dépend pas du couple (A, B) choisi

Définition 2

Le degré de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
- $\deg(FG) = \deg F + \deg G$

$P \wedge Q = 1$

Définition 3

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *irréductible*

- $a \in \mathbb{K}$ est un zéro de F si : $P(a) = 0$
- $a \in \mathbb{K}$ est un pôle de F si : $Q(a) = 0$

2 Zéros et pôles

Ne dépend pas du couple (A, B) choisi

Définition 2

Le degré de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\deg(F+G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
- $\deg(FG) = \deg F + \deg G$

$P \wedge Q = 1$

Définition 3

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *irréductible*

- $a \in \mathbb{K}$ est un zéro de F si : $P(a) = 0$
- $a \in \mathbb{K}$ est un pôle de F si : $Q(a) = 0$

Exercice 1

a peut-il être à la fois zéro et pôle de F ?

2 Zéros et pôles

Ne dépend pas du couple (A, B) choisi

Définition 2

Le degré de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\deg F \underset{\text{déf.}}{=} \deg A - \deg B$

Dans $\mathbb{K}[X]$:

- $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
- $\deg(FG) = \deg F + \deg G$

$P \wedge Q = 1$

Définition 3

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *irréductible*

- $a \in \mathbb{K}$ est un zéro de F si : $P(a) = 0$
- $a \in \mathbb{K}$ est un pôle de F si : $Q(a) = 0$

Exemple 2

Quels sont les zéros et pôles de $F = \frac{X^5 - 4X^4 + 3X^3}{X^3 - 5X^2 + 6X} \in \mathbb{R}(X)$?

3 Partie entière

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

-
-

3 Partie entière

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :
- $F = E + G$
-

3 Partie entière

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

- $F = E + G$
- $\deg G < 0$

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

- $F = E + G$
- $\deg G < 0$

partie entière de F

3 Partie entière

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

- $F = \mathrm{E} + G$
- $\deg G < 0$

partie entière de F

Exercice 2

Démontrer l'existence et l'unicité du couple (E, G) du théorème.

3 Partie entière

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

- $F = \underbrace{E}_{\text{partie entière de } F} + G$
- $\deg G < 0$

Exemple 3 : Déterminer les parties entières

a) $\dfrac{X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 1}{X^2 - 3X + 1}$ b) $\dfrac{X^3 - 2}{X^4 - 1}$ c) $X^2 + 3X$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Cadre

Après factorisation du dénominateur : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}}$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A découper en C.L.
de morceaux plus simples

Cadre

Après factorisation du dénominateur : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}}$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A découper en C.L.
de morceaux plus simples

Cadre

Après factorisation du dénominateur : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}}$

Théorème 2

F s'écrit de manière unique sous la forme :

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A découper en C.L.
de morceaux plus simples

Cadre

Après factorisation du dénominateur : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}}$

Théorème 2

F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_{i,1}}{X - a_i} + \frac{\alpha_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{i,m_i}}{(X - a_i)^{m_i}} \right)$$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A découper en C.L.
de morceaux plus simples

Cadre

Après factorisation du dénominateur : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}}$

Partie
entière

Théorème 2

F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = \boxed{E} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_{i,1}}{X - a_i} + \frac{\alpha_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{i,m_i}}{(X - a_i)^{m_i}} \right)$$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A découper en C.L.
de morceaux plus simples

Cadre

Après factorisation du dénominateur : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}}$

Partie
entière

somme de k
paquets de terme

Théorème 2

F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_{i,1}}{X - a_i} + \frac{\alpha_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{i,m_i}}{(X - a_i)^{m_i}} \right)$$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A découper en C.L.
de morceaux plus simples

Cadre

Après factorisation du dénominateur : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}}$

Partie
entière

Théorème 2

somme de k
paquets de terme

partie polaire
associée à a_i

F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_{i,1}}{X - a_i} + \frac{\alpha_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{i,m_i}}{(X - a_i)^{m_i}} \right)$$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

A découper en C.L.
de morceaux plus simples

Cadre

Après factorisation du dénominateur : $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{P}{\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}}$

Théorème 2

Partie entière

somme de k paquets de terme

partie polaire associée à a_i

F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_{i,1}}{X - a_i} + \frac{\alpha_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{i,m_i}}{(X - a_i)^{m_i}} \right)$$

Exemple 4 : Quelle forme pour les fractions suivantes ?

a) $F = \dfrac{X^{10} + 16}{(X - 1)^3 X (X^2 + 1)^2}$ b) $G = \dfrac{X^8 + 1}{(X^2 + 1)(X^2 - 2)^2}$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Cadre

Après factorisation : $F = \dfrac{P}{\lambda \prod\limits_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i} \prod\limits_{i=1}^{\ell} (X^2 + p_i X + q_i)^{n_i}}$

Cadre

Après factorisation : $F = \dfrac{P}{\lambda \prod\limits_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i} \prod\limits_{i=1}^{\ell} (X^2 + p_i X + q_i)^{n_i}}$

Théorème 3

F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j} X + b_{i,j}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j}$$

Cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Cadre

Après factorisation : $F = \dfrac{P}{\lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{\ell} (X^2 + p_i X + q_i)^{n_i}}$

Théorème 3

F s'écrit de manière unique sous la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j} X + b_{i,j}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j}$$

Exemple 5 : Quelle forme pour les fractions suivantes ?

a) $G = \dfrac{X^8 + 1}{(X^2 + 1)(X^2 - 2)^2}$ b) $H = \dfrac{1}{X^3(1 + X + X^2)^2}$

III Pratique de la décomposition en éléments simples

But

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

But

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :*

But

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne

But

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :*

But

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur

But

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients à déterminer

1 Cas des pôles simples

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients à déterminer

Cadre

La D.E.S. est de la forme :

1 Cas des pôles simples

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients à déterminer

Cadre

La D.E.S. est de la forme : $(\star) \quad F(X) = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients à déterminer

a n'est pas pôle de G

Cadre

La D.E.S. est de la forme : $(\star) \quad F(X) = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients à déterminer

Cadre

La D.E.S. est de la forme : $(\star) \quad F(X) = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$

On cherche à calculer α

a n'est pas pôle de G

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients à déterminer

Cadre

La D.E.S. est de la forme : $(\star) \quad F(X) = \frac{\alpha}{X-a} + G$

On cherche à calculer α

a n'est pas pôle de G

La méthode du « cache »

On multiplie $(\star)$ par $(X-a)$ puis on évalue en a.

1 Cas des pôles simples

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients à déterminer

On cherche à calculer α

a n'est pas pôle de G

Cadre

La D.E.S. est de la forme : $(\star)$ $F(X) = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$

La méthode du « cache »

On multiplie $(\star)$ par $(X-a)$ puis on évalue en a.

Exemple 1 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

a) $\dfrac{1}{X^2-1}$ b) $\dfrac{X^3+2}{X^2-X}$

1 Cas des pôles simples

SF 11 : Les étapes pour décomposer F en élément simples

1. *Partie entière :* se détermine par une division euclidienne
2. *Pôles et multiplicités :* on factorise le dénominateur
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients à déterminer

Cadre

On cherche à calculer α

a n'est pas pôle de G

La D.E.S. est de la forme : $(\star)$ $F(X) = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$

La méthode du « cache »

On multiplie $(\star)$ par $(X-a)$ puis on évalue en a.

Exemple 2

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{X^5-1}$

1 Cas des pôles simples

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, avec $P \wedge Q = 1$, admettant a pour pôle simple

1 Cas des pôles simples

$$F = \frac{\alpha}{X - a} + G \quad \text{où } a \text{ n'est pas pôle de } G$$

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, avec $P \wedge Q = 1$, admettant a pour pôle simple

1 Cas des pôles simples

$$F = \frac{\alpha}{X - a} + G \quad \text{où } a \text{ n'est pas pôle de } G$$

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, avec $P \wedge Q = 1$, admettant a pour pôle simple

Alors : $\boxed{\alpha = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$

1 Cas des pôles simples

$F = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$ où a n'est pas pôle de G

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, avec $P \wedge Q = 1$, admettant a pour pôle simple

Alors : $\boxed{\alpha = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$

Exercice 1

Démontrer le théorème précédent.

1 Cas des pôles simples

$F = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$ où a n'est pas pôle de G

Théorème 1

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, avec $P \wedge Q = 1$, admettant a pour pôle simple

Alors : $\boxed{\alpha = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$

Exemple 3

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{X^n - 1}$.

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S.

- *Méthode du « cache ».*

- *Méthode* $\lim\limits_{x \to +\infty} xF(x)$.

- *Evaluer en des points particulier*

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S.

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$.
- *Evaluer en des points particulier*

2 Cas général

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x \to +\infty} xF(x)$.
- *Evaluer en des points particulier*

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode $\lim_{x\to+\infty} xF(x)$.* Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier*

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$. Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$. Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

Exemple 4 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

a) $$\frac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}$$

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$*.* Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

Exemple 4 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

b) $\dfrac{X^3}{(X-1)^2(X-2)^2}$

2 Cas général

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$*.* Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

Exemple 4 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$\text{c)}\qquad \frac{25}{(X-1)^2(X^2+4)}$$

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$*.* Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

Exemple 4 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

d) $$\frac{3(X-2)^2}{X(X-1)^2(X^2+X+1)}$$

2 Cas général

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$*.* Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

Exemple 4 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$\text{e)} \qquad \frac{X^2}{(X^2-1)^2}$$

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$*.* Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

Exemple 5 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$\frac{2n}{X^{2n}-1}.$$

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$.* Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

$$\frac{e^{i\theta}}{X-e^{i\theta}} + \frac{e^{-i\theta}}{X-e^{-i\theta}} =$$

Exemple 5 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$\frac{2n}{X^{2n}-1}.$$

m : multiplicité de a

SF 12 : Calculer les coefficients de la D.E.S

- *Méthode du « cache ».* Pour le coef. de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ on mutliplie par $(X-a)^m$ puis on évalue en a.
- *Méthode* $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$. Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains coef.
- *Evaluer en des points particulier* (hors pôles)

$$\frac{e^{i\theta}}{X-e^{i\theta}}+\frac{e^{-i\theta}}{X-e^{-i\theta}}=\frac{2\cos(\theta)X-2}{X^2-2\cos(\theta)X+1}$$

Exemple 5 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

$$\frac{2n}{X^{2n}-1}.$$

3 Décomposition de $\frac{P'}{P}$

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres :

3 Décomposition de $\frac{P'}{P}$

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres :

$$\boxed{\frac{P'}{P} = \qquad}$$

3 Décomposition de $\frac{P'}{P}$

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres :

$$\boxed{\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{}{X - a_i}}$$

3 Décomposition de $\frac{P'}{P}$

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres :

$$\boxed{\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X - a_i}}$$

3 Décomposition de $\frac{P'}{P}$

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres :

$$\boxed{\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X - a_i}}$$

Exercice 2

Etablir la décomposition donnée par le théorème.

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$$

Théorème 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres :

$$\boxed{\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X - a_i}}$$

Exemple 6

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

IV Application au calcul de primitives

Application au calcul de primitives

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t$.

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$

Type 1

- Fonction : Polynôme
- Primitive :

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$

Type 1

- Fonction : Polynôme
- Primitive : Polynôme

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$

Type 1

- Fonction : Polynôme
- Primitive : Polynôme

Type 2

- Fonction : $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$

Type 1

- Fonction : Polynôme
- Primitive : Polynôme

Type 2

- Fonction : $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k = 1$

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $$\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$$

Type 1

- Fonction :
  Polynôme
- Primitive :
  Polynôme

Type 2

- Fonction :
  $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k = 1$
    $$x \mapsto \ln|x-a|$$

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$

Type 1

- Fonction :
  Polynôme
- Primitive :
  Polynôme

Type 2

- Fonction :
  $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k = 1$
    $x \mapsto \ln|x-a|$
  - Si $k \geq 2$:

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $$\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$$

Type 1

- Fonction :
  Polynôme
- Primitive :
  Polynôme

Type 2

- Fonction :
  $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k = 1$
    $$x \mapsto \ln|x-a|$$
  - Si $k \geq 2$:
    $$x \mapsto \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$$

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$

Type 1

- Fonction : Polynôme
- Primitive : Polynôme

Type 2

- Fonction : $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k=1$ $$x \mapsto \ln|x-a|$$
  - Si $k \geq 2$: $$x \mapsto \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$$

Type 3

- Fonction : $$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$
- Primitive

Application au calcul de primitives

On décompose F
puis on primitive les morceaux

Cadre

Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer : $\displaystyle\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t.$

Type 1

- Fonction :
  Polynôme
- Primitive :
  Polynôme

Type 2

- Fonction :
  $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k = 1$
    $x \mapsto \ln|x-a|$
  - Si $k \geq 2$:
    $x \mapsto \dfrac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$

Type 3

- Fonction :
  $$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$
- Primitive
  i) On fait apparaître $\frac{u'}{u}$ en factorisant par $\frac{a}{2}$
  ii) Le morceau restant se primitive à l'aide d'un arctangente

Application au calcul de primitives

Type 1

- Fonction :

  Polynôme

- Primitive :

  Polynôme

Type 2

- Fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$

- Primitive :
  - Si $k = 1$

    $x \mapsto \ln|x-a|$

  - Si $k \geq 2$:

    $x \mapsto \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$

Type 3

- Fonction :

$$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$

- Primitive

  i) On fait apparaître $\frac{u'}{u}$ en factorisant par $\frac{a}{2}$

  ii) Le morceau restant se primitive à l'aide d'un arctangente

Rappel :

$$\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2} \underset{P}{\rightarrow} \frac{1}{\beta} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$$

Application au calcul de primitives

Type 1

- Fonction : Polynôme
- Primitive : Polynôme

Type 2

- Fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$

- Primitive :
  - Si $k = 1$

    $x \mapsto \ln|x-a|$
  - Si $k \geq 2$:

    $x \mapsto \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$

Type 3

- Fonction :

$$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$

- Primitive
  i) On fait apparaître $\frac{u'}{u}$ en factorisant par $\frac{a}{2}$
  ii) Le morceau restant se primitive à l'aide d'un arctangente

Rappel : $\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2} \xrightarrow[\mathrm{P}]{} \frac{1}{\beta}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$

Exemple 1 : Déterminer une primitive

a) $x \mapsto \dfrac{3+4x}{x^2+4}$

Application au calcul de primitives

Type 1

- Fonction : Polynôme
- Primitive : Polynôme

Type 2

- Fonction : $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k = 1$ $$x \mapsto \ln|x-a|$$
  - Si $k \geq 2$: $$x \mapsto \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$$

Type 3

- Fonction : $$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$
- Primitive
  - i) On fait apparaître $\frac{u'}{u}$ en factorisant par $\frac{a}{2}$
  - ii) Le morceau restant se primitive à l'aide d'un arctangente

Rappel :
$$\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2} \underset{P}{\rightarrow} \frac{1}{\beta}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$$

Exemple 1 : Déterminer une primitive

b) $x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2+2x+5}$

Application au calcul de primitives

Type 1

- Fonction :
  Polynôme
- Primitive :
  Polynôme

Type 2

- Fonction :
  $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k = 1$
    $$x \mapsto \ln|x-a|$$
  - Si $k \geq 2$:
    $$x \mapsto \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$$

Type 3

- Fonction :
  $$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$
- Primitive
  i) On fait apparaître $\frac{u'}{u}$ en factorisant par $\frac{a}{2}$
  ii) Le morceau restant se primitive à l'aide d'un arctangente

Exemple 2 : Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4t^5}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$$

Rappel :

$$\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2} \underset{\mathrm{P}}{\to} \frac{1}{\beta}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$$

Application au calcul de primitives

Type 1

- Fonction : Polynôme
- Primitive : Polynôme

Type 2

- Fonction : $$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^k}$$
- Primitive :
  - Si $k = 1$ $$x \mapsto \ln|x-a|$$
  - Si $k \geq 2$: $$x \mapsto \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}$$

Type 3

- Fonction : $$x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$
- Primitive
  i) On fait apparaître $\frac{u'}{u}$ en factorisant par $\frac{a}{2}$
  ii) Le morceau restant se primitive à l'aide d'un arctangente

Rappel : $\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2} \xrightarrow[\mathrm{P}]{} \frac{1}{\beta}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$

Exemple 3 : Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t}{(t^2+t+1)(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$