Calcul Matriciel

(Matrices – Niveau 1)

Chapitre 17

I Notion de matrice

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & \cdots & & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$

Application

$$A : \begin{array}{rcl} [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$

Application

$$A : \begin{array}{ccc} [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & n \\ p & \end{array}$$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$

Application

$$A : \begin{array}{rcl} [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & j & \\ i & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & a_{i,j} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & \cdots & & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & n \\ & p & \end{array}$$

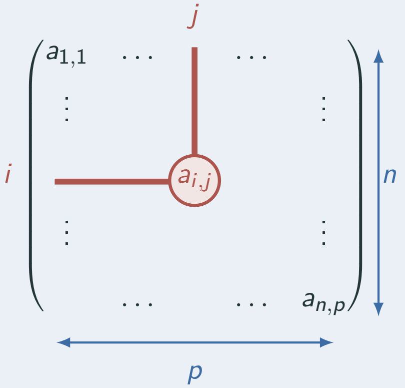
1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 1

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$

Application

$$A: \begin{array}{ccc} [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array}$$



Exemple 1

Ecrire explicitement la matrice $A = (ij^2)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,p]\!] \times [\![1\,,n]\!], \quad (A^\top)_{i,j} =$$

Définition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,p]\!] \times [\![1\,,n]\!], \quad (A^\top)_{i,j} = a_{j,i}$$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

les lignes de $A^\top$
sont les colonnes de A

Définition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,p]\!] \times [\![1\,,n]\!], \quad (A^\top)_{i,j} = a_{j,i}$$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

les lignes de $A^\top$
sont les colonnes de A

Définition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,p]\!] \times [\![1\,,n]\!], \quad (A^\top)_{i,j} = a_{j,i}$$

Remarque

$(A^\top)^\top =$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

les lignes de $A^\top$
sont les colonnes de A

Définition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,p]\!] \times [\![1\,,n]\!], \quad (A^\top)_{i,j} = a_{j,i}$$

Remarque

$(A^\top)^\top = A$

les lignes de $A^\top$
sont les colonnes de A

Définition 2

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,p]\!] \times [\![1\,,n]\!], \quad (A^\top)_{i,j} = a_{j,i}$$

Remarque

$(A^\top)^\top = A$

Exercice 1 : Calculer la transposée

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Vocabulaire et notations

- Matrice ligne :
- Matrice colonne :
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Vocabulaire et notations

- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
- Matrice colonne :
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix}}^{p}$$

Vocabulaire et notations

- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
- Matrice colonne :
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \quad \cdots \quad \end{pmatrix}}^{p}$$

Vocabulaire et notations

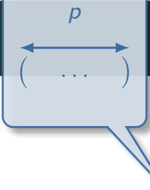
- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
- Matrice colonne :qui n'a qu'une colonne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

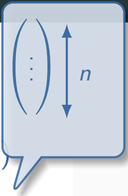
1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Vocabulaire et notations

- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ $\quad \overbrace{\begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix}}^{p}$
- Matrice colonne :qui n'a qu'une colonne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $\quad \left.\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}\right\updownarrow n$
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

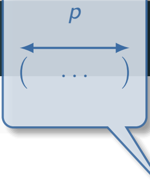


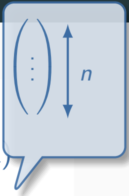


Vocabulaire et notations

- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
- Matrice colonne :qui n'a qu'une colonne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: dont tous les coefficients sont nuls, notée $0_{n,p}$

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$





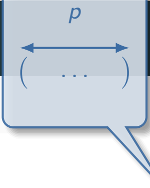
Vocabulaire et notations

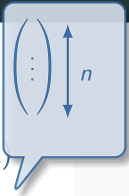
- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
- Matrice colonne :qui n'a qu'une colonne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: dont tous les coefficients sont nuls, notée $0_{n,p}$

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour :
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour :
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour :

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$





Vocabulaire et notations

- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
- Matrice colonne :qui n'a qu'une colonne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: dont tous les coefficients sont nuls, notée $0_{n,p}$

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour :
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour :

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\begin{array}{c} p \\ \longleftrightarrow \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix} \updownarrow n$$

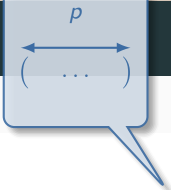
Vocabulaire et notations

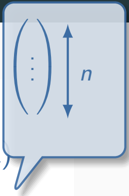
- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
- Matrice colonne :qui n'a qu'une colonne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: dont tous les coefficients sont nuls, notée $0_{n,p}$

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i > j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour :

1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$





Vocabulaire et notations

- Matrice ligne : qui n'a qu'une ligne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$
- Matrice colonne :qui n'a qu'une colonne *i.e.* élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- Matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: dont tous les coefficients sont nuls, notée $0_{n,p}$

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i > j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i < j$

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i > j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i < j$

Définition 3

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *symétrique* si :
- *antisymétrique* si :

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i > j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i < j$

Définition 3

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *symétrique* si : $A^\top = A$
- *antisymétrique* si :

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i > j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i < j$

pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$

$$a_{i,j} = a_{j,i}$$

Définition 3

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *symétrique* si : $A^\top = A$
- *antisymétrique* si :

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i > j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i < j$

pour tous $i, j \in [\![1\,,\,n]\!]$

$a_{i,j} = a_{j,i}$

Définition 3

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *symétrique* si : $A^\top = A$
- *antisymétrique* si : $A^\top = -A$

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i > j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i < j$

Définition 3

pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ $a_{i,j} = a_{j,i}$

pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$ $a_{i,j} = -a_{j,i}$

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *symétrique* si : $A^\top = A$
- *antisymétrique* si : $A^\top = -A$

Matrices carrées particulières

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i \neq j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire supérieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i > j$
- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *triangulaire inférieure* si $a_{i,j} = 0$ pour : $i < j$

pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$
$a_{i,j} = a_{j,i}$

pour tous $i, j \in [\![1\,,n]\!]$
$a_{i,j} = -a_{j,i}$

Définition 3

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *symétrique* si : $A^\top = A$
- *antisymétrique* si : $A^\top = -A$

Exemple 2

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ est symétrique b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ antisymétrique

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\quad \lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=}$

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Retenir Les C.L. s'effectuent coefficient par coefficient, par ex. :

$$2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\quad \lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=} \left(\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

Retenir Les C.L. s'effectuent coefficient par coefficient, par ex. :

$$2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Retenir Les C.L. s'effectuent coefficient par coefficient, par ex. :

$$2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque

La transposition est linéaire :

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Retenir Les C.L. s'effectuent coefficient par coefficient, par ex. :

$$2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque

La transposition est linéaire : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 4

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Retenir Les C.L. s'effectuent coefficient par coefficient, par ex. :

$$2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque

La transposition est linéaire : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 5

La *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et tous les autres 0.

2 Combinaisons linéaires de matrices

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Remarque

La transposition est linéaire : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

Définition 6

La *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et tous les autres 0.

Exemple 3

Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, écrire les matrices $E_{i,j}$.

2 Combinaisons linéaires de matrices

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Remarque

La transposition est linéaire : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

Définition 6

La *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et tous les autres 0.

Exemple 3

Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, écrire les matrices $E_{i,j}$.

Théorème 1

Toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

2 Combinaisons linéaires de matrices

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Remarque

La transposition est linéaire : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

Définition 6

La *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et tous les autres 0.

Exemple 3

Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, écrire les matrices $E_{i,j}$.

$$A = \sum \qquad E_{i,j}$$

Théorème 1

Toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : combinaison linéaire des $E_{i,j}$

2 Combinaisons linéaires de matrices

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Remarque

La transposition est linéaire : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

Définition 6

La *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et tous les autres 0.

Exemple 3

Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, écrire les matrices $E_{i,j}$.

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$$

Théorème 1

Toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : combinaison linéaire des $E_{i,j}$

2 Combinaisons linéaires de matrices

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Remarque

La transposition est linéaire : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

Définition 6

La *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et tous les autres 0.

Exemple 3

Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, écrire les matrices $E_{i,j}$.

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$$

Théorème 1

Toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : combinaison linéaire des $E_{i,j}$

Remarque

Une matrice triangulaire supérieure T est C.L. des $E_{i,j}$ pour :

2 Combinaisons linéaires de matrices

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Remarque

La transposition est linéaire : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

Définition 6

La *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et tous les autres 0.

Exemple 3

Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, écrire les matrices $E_{i,j}$.

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$$

Théorème 1

Toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est : combinaison linéaire des $E_{i,j}$

Remarque

Une matrice triangulaire supérieure T est C.L. des $E_{i,j}$ pour : $i \leq j$

II Produit matriciel

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} =$$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ **Attention** ☢ **à la condition de compatibilité**

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ **Attention** ☢ **à la condition de compatibilité**

« taille $(n,p) \times$ taille $(p,q) =$ taille (n,q) »

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ Attention ☢ à la condition de compatibilité

« taille (n,p) $\times$ taille (p,q) $=$ taille (n,q) »

Exemple 1 : Calculer AB

a) $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ Attention ☢ à la condition de compatibilité

« taille $(n,p) \times$ taille $(p,q) =$ taille (n,q) »

Exemple 1 : Calculer AB

b) $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Attention à la condition de compatibilité

« taille $(n,p) \times$ taille $(p,q) =$ taille (n,q) »

Exemple 1 : Calculer AB

b) $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, puis : $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ **Attention** ☢ **à la condition de compatibilité**

« taille $(n,p) \times$ taille $(p,q) =$ taille (n,q) »

Exemple 1 : Bonus : calculer BX

c) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ Attention ☢ à la condition de compatibilité

« taille (n,p) $\times$ taille (p,q) $=$ taille (n,q) »

Exemple 1 : Bonus : calculer BX

c) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ Attention ☢ à la condition de compatibilité

« taille $(n,p) \times$ taille $(p,q) =$ taille (n,q) »

Remarque

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{AX = \quad\quad\quad\quad}$$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ Attention ☢ à la condition de compatibilité

« taille $(n,p) \times$ taille $(p,q) =$ taille (n,q) »

Remarque

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_p$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p}$$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

☢ Attention ☢ à la condition de compatibilité

« taille (n, p) × taille (p, q) = taille (n, q) »

Remarque

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

C.L. des colonnes de A

$$\boxed{AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p}$$

1 Définition du produit

Définition 1

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,n]\!] \times [\![1\,,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Attention à la condition de compatibilité

$$\text{« taille } (n,p) \times \text{taille } (p,q) = \text{taille } (n,q) \text{ »}$$

Remarque

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_p$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

C.L. des colonnes de A

$$\boxed{AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p}$$

En particulier :

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_i$$

i^e coord.

2 Particularités et propriétés du produit

Remarque

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \dots, C_p$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p}$$

C.L. des colonnes de A

En particulier :

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_i$$

i^{e} coord.

Remarque

Le produit matriciel n'est pas commutatif

2 Particularités et propriétés du produit

Remarque

Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_p$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p}$$

C.L. des colonnes de A

En particulier :

$$A \times \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C_i$$

i^{e} coord.

Remarque

On peut avoir

- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

Remarque

A est nilpotente

On peut avoir
- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

A est nilpotente

Remarque

On peut avoir
- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

Théorème 1 : Propriétés

1. *Bilinéarité.*

-
-

A est nilpotente

Remarque

On peut avoir
- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

Théorème 1 : Propriétés

1. *Bilinéarité.*

- $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$
-

2 Particularités et propriétés du produit

A est nilpotente

Remarque

On peut avoir
- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

Théorème 1 : Propriétés

1. *Bilinéarité.*

- $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$
- $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$

2 Particularités et propriétés du produit

A est nilpotente

Remarque

On peut avoir
- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

Théorème 1 : Propriétés

1. *Bilinéarité.*
   - $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$
   - $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$
2. *Associativité.*

A est nilpotente

Remarque

On peut avoir
- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

Théorème 1 : Propriétés

1. *Bilinéarité.*
   - $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$
   - $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$
2. *Associativité.* $(AB)C = A(BC)$

Remarque

On peut avoir

- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

A est nilpotente

Théorème 1 : Propriétés

1. *Bilinéarité.*
   - $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$
   - $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$
2. *Associativité.* $(AB)C = A(BC)$
3. *Transposition.*

2 Particularités et propriétés du produit

Remarque

A est nilpotente

On peut avoir
- $AB = 0$ avec $A, B \neq 0$
- $A^n = 0$ avec $A \neq 0$

Théorème 1 : Propriétés

1. *Bilinéarité.*
   - $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$
   - $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$
2. *Associativité.* $(AB)C = A(BC)$
3. *Transposition.* $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Exercice 1

Démontrer la propriété d'associativité.

3 Produits de matrices carrées particulières

Théorème 2 : Matrices diagonales

Pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} =$$

Théorème 2 : Matrices diagonales

Pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

3 Produits de matrices carrées particulières

Théorème 2 : Matrices diagonales

Pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Théorème 3 : Matrices triangulaires

1. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

3 Produits de matrices carrées particulières

Théorème 2 : Matrices diagonales

Pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Théorème 3 : Matrices triangulaires

1. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 2

Démontrer le premier point.

3 Produits de matrices carrées particulières

Théorème 4 : Matrices élémentaires

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1\,,n]\!]$:

$$E_{i,j}E_{k,\ell} =$$

Théorème 4 : Matrices élémentaires

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1\,, n]\!]$:

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

3 Produits de matrices carrées particulières

Théorème 4 : Matrices élémentaires

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1\,,n]\!]$:

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Exercice 3

1. Démontrer la formule

3 Produits de matrices carrées particulières

Théorème 4 : Matrices élémentaires

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1\,,n]\!]$:

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Exercice 3

1. Démontrer la formule
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1\,,n]\!]$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.

4 Produit par blocs

Théorème 5

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & p' \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} n \ \updownarrow \\ n' \ \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q & q' \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} p \ \updownarrow \\ p' \ \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}$$

Exemple 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^2 à l'aide de la formule.

III Puissances de matrices carrées

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n =$
2.

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_nA = AI_n = A$
2.

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n = A$
2. $(\lambda I_n)\, A = A(\lambda I_n) =$.

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n = A$
2. $(\lambda I_n)\ A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

matrice scalaire

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_nA = AI_n = A$
2. $(\lambda I_n)\ A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

matrice scalaire

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n = A$
2. $(\lambda I_n)\ A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est :

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

matrice scalaire

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n = A$
2. $(\lambda I_n)\, A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est : un anneau

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n = A$
2. $(\lambda I_n)\ A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

matrice scalaire

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est : un anneau

I_n est l'élément neutre pour $\times$

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

matrice scalaire

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n = A$
2. $(\lambda I_n)\ A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

L'ensemble T_n des matrices tri. sup.

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est : un anneau

I_n est l'élément neutre pour $\times$

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

matrice scalaire

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_nA = AI_n = A$
2. $(\lambda I_n)\, A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

L'ensemble T_n des matrices tri. sup.
en est un sous-anneau

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est : un anneau

I_n est l'élément neutre pour $\times$

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

matrice scalaire

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n = A$
2. $(\lambda I_n)\, A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

L'ensemble T_n des matrices tri. sup.
en est un sous-anneau

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est : un anneau

I_n est l'élément neutre pour $\times$

Attention

1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 1

La matrice identité de taille n est $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Remarque

matrice scalaire

Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $I_n A = A I_n = A$
2. $(\lambda I_n)\, A = A(\lambda I_n) = \lambda A.$

L'ensemble T_n des matrices tri. sup.
en est un sous-anneau

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est : un anneau

I_n est l'élément neutre pour $\times$

Attention

Cet anneau n'est pas commutatif

2 Calculer les puissances d'une matrice carrée

Cadre

Etant donnés $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$, on souhaite calculer A^p.

2 Calculer les puissances d'une matrice carrée

Cadre

Etant donnés $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$, on souhaite calculer A^p.

Rappel

$A^0 = \ I_n$

2 Calculer les puissances d'une matrice carrée

Cadre

Etant donnés $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$, on souhaite calculer A^p.

Rappel

$A^0 = I_n$

élément neutre de $\times$

Méthode 1 : par récurrence

Exemple 1 : Matrice pleine de 1

On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 puis montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad J^p = 3^{p-1} J$$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

On suppose que :

-

alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

-

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$$

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$
- $\boxed{A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$ $= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
- $\boxed{A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$ $= (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$$

$$= (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}$$

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$
- $\boxed{A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$

☢ Attention ☢

Si $AB \neq BA$, alors, par exemple :

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$

  $= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$

- $\boxed{A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$

  $= (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}$

☢ Attention ☢

Si $AB \neq BA$, alors, par exemple : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$$

$$= (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}$$

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$
- $\boxed{A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$

☢ Attention ☢

Si $AB \neq BA$, alors, par exemple : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Remarque

Toute matrice commute avec :
-
-

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$

$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$

- $\boxed{A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$

$= (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}$

☢ Attention ☢

Si $AB \neq BA$, alors, par exemple : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Remarque

Toute matrice commute avec :

- I_n
-

Méthode 2 : avec la formule du binôme

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$$

$$= (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}$$

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$
- $\boxed{A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$

☢ Attention ☢

Si $AB \neq BA$, alors, par exemple : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Remarque

Toute matrice commute avec :

- I_n
- les matrices scalaires

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$ $= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
- $\boxed{A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$ $= (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}$

☢ Attention ☢

Si $AB \neq BA$, alors, par exemple : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Remarque

Toute matrice commute avec :
- I_n
- les matrices scalaires

Exemple 2 : Calculer A^p

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : avec la formule du binôme

Théorème 1

On suppose que : $\boxed{AB = BA}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}}$ $= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
- $\boxed{A^p - B^p = (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$ $= (A-B)\sum_{k=0}^{p-1} B^k A^{p-1-k}$

☢ Attention ☢

Si $AB \neq BA$, alors, par exemple : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

Remarque

Toute matrice commute avec :
- I_n
- les matrices scalaires

Exemple 2 : Calculer A^p

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode 3 : à l'aide d'un polynôme annulateur

Notation

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice $\sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Méthode 3 : à l'aide d'un polynôme annulateur

$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$

Notation

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

$P(A) =$

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice $\sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Méthode 3 : à l'aide d'un polynôme annulateur

$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$

Notation

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d$

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice $\sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Méthode 3 : à l'aide d'un polynôme annulateur

$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$

Notation

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d$

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice $\sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Exemple 3 : Puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et trouver $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. En déduire une expression de A^n en exploitant la division euclidienne de X^n par P.

Exemple 4

On pose : $u_0 = 1$ et $v_0 = w_0 = 0$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

Calculer explicitement u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 4

On pose : $u_0 = 1$ et $v_0 = w_0 = 0$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

Calculer explicitement u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV Matrices carrées inversibles

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : .

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté :

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est :

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

groupe des inversibles
de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et :

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

groupe des inversibles
de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) AB est inversible et :

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

1 Généralités

Rappel

A est inversible si : il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée A^{-1}

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) A^p est inversible et :

1 Généralités

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K})\,,\,\times)$ est : un groupe

groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

1 Généralités

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

iv) $A^\top$ est inversible et :

1 Généralités

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K})\,,\,\times)$ est : un groupe

groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

iv) $A^\top$ est inversible et : $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

1 Généralités

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté : $GL_n(\mathbb{K})$

Remarque

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est : un groupe

groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Théorème 1 : (Rappels)

i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

iv) $A^\top$ est inversible et : $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

Exercice 1

Démontrer le point *iv)* sur l'inversibilité et l'inverse de $A^\top$.

Exemple 1

La matrice identité I_n est inversible et :

Exemple 1

La matrice identité I_n est inversible et : $(I_n)^{-1} = I_n$.

1 Généralités

Exemple 1

La matrice identité I_n est inversible et : $(I_n)^{-1} = I_n$.

Exemple 2

Montrer que la matrice nulle 0_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible

Exemple 1

La matrice identité I_n est inversible et : $(I_n)^{-1} = I_n$.

Exemple 2

Montrer que la matrice nulle 0_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible

Théorème 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres alors :

1 Généralités

Exemple 1

La matrice identité I_n est inversible et : $(I_n)^{-1} = I_n$.

Exemple 2

Montrer que la matrice nulle 0_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible

Théorème 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres alors : A n'est pas inversible.

Exemple 1

La matrice identité I_n est inversible et : $(I_n)^{-1} = I_n$.

Exemple 2

Montrer que la matrice nulle 0_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible

Théorème 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres alors : A n'est pas inversible.

En particulier si

- une colonne est nulle
- deux colonnes sont identiques

1 Généralités

Exemple 1

La matrice identité I_n est inversible et : $(I_n)^{-1} = I_n$.

Exemple 2

Montrer que la matrice nulle 0_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible

En particulier si

- une colonne est nulle
- deux colonnes sont identiques

Théorème 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres alors : A n'est pas inversible.

Exercice 2

Démontrer le théorème

Théorème 3 : (admis provisoirement)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

i) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

ii) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Il suffit de vérifier
une des deux conditions

Théorème 3 : (admis provisoirement)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

i) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

ii) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Inversibilité en présence d'un *polynôme annulateur* :

Exercice 3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A vérifie $A^2 - 3A - 2I_n = 0$. Prouver que A est inversible et déterminer son inverse.

Le cas des matrices de taille (2,2) :

Théorème 4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si et seulement si :

Dans ce cas :

Le cas des matrices de taille (2,2) :

Théorème 4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si et seulement si : $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas :

Le cas des matrices de taille (2,2) :

Théorème 4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si et seulement si : $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas : $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}$$

Le cas des matrices de taille (2,2) :

Théorème 4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si et seulement si : $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas : $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}$$

Exercice 4

Démontrer le théorème ci dessus.

Cas des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 5

- Une matrice diagonale est inversible si et seulement si :
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si

Exercice 5

Démontrer le premier point du théorème ci dessus.

Cas des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 5

- Une matrice diagonale est inversible si et seulement si : tous ses coefficients diagonaux sont non nuls
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si

Exercice 5

Démontrer le premier point du théorème ci dessus.

Cas des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 5

- Une matrice diagonale est inversible si et seulement si : tous ses coefficients diagonaux sont non nuls
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls

Exercice 5

Démontrer le premier point du théorème ci dessus.

Cas des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 5

- Une matrice diagonale est inversible si et seulement si : tous ses coefficients diagonaux sont non nuls
- Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls

Pas d'expression simple pour l'inverse

Exercice 5

Démontrer le premier point du théorème ci dessus.

V Opérations élémentaires

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z &= 1 \\ -x \qquad + z &= -3 \end{cases} \iff$$

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x + y - z & = & 1 \\ -x \quad\quad + z & = & -3 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x + y - z & = & 1 \\ -x \quad\quad + z & = & -3 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z & = 1 \\ -x \qquad + z & = -3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

matrice
du système

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & 1 \\ -x \quad\quad + z & = & -3 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

matrice du système

inconnues

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x + y - z & = & 1 \\ -x \quad + z & = & -3 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

matrice du système

inconnues

second membre

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z & = 1 \\ -x \quad\;\; + z & = -3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

matrice du système

inconnues

second membre

Théorème 1

Le système $AX = B$ est compatible ssi :

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z & = \ \ 1 \\ -x \qquad + z & = -3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Théorème 1

Le système $AX = B$ est compatible ssi : B est combinaison linéaire des colonnes de A

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z & = & 1 \\ -x + z & = & -3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Rappel :

$AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p$

Théorème 1

Le système $AX = B$ est compatible ssi : B est combinaison linéaire des colonnes de A

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z & = & 1 \\ -x \quad\quad + z & = & -3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Rappel :
$AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p$

Théorème 1

Le système $AX = B$ est compatible ssi : B est combinaison linéaire des colonnes de A

Exercice 0

Démontrer le théorème.

1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple 1

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z & = & 1 \\ -x \quad + z & = & -3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Rappel :

$AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p$

Théorème 1

Le système $AX = B$ est compatible ssi : B est combinaison linéaire des colonnes de A

signifie :

A est inversible

Exercice 1

Montrer qu'un système de Cramer possède une unique solution.

2 Matrices d'opérations élémentaires

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

2 Matrices d'opérations élémentaires

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul :

2 Matrices d'opérations élémentaires

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_{n}(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

2 Matrices d'opérations élémentaires

$\alpha \neq 0$

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

2 Matrices d'opérations élémentaires

$\alpha \neq 0$

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

Type 2 Addition à une ligne d'un multiple d'une autre :

2 Matrices d'opérations élémentaires

$\alpha \neq 0$

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

Type 2 Addition à une ligne d'un multiple d'une autre : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$

2 Matrices d'opérations élémentaires

$\alpha \neq 0$

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

Type 2 Addition à une ligne d'un multiple d'une autre : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$

$i \neq j$

2 Matrices d'opérations élémentaires

$\alpha \neq 0$

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

Type 2 Addition à une ligne d'un multiple d'une autre : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$

Type 3 Echange de deux lignes, notée :

$i \neq j$

2 Matrices d'opérations élémentaires

$\alpha \neq 0$

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

Type 2 Addition à une ligne d'un multiple d'une autre : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$

Type 3 Echange de deux lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$

$i \neq j$

$\alpha \neq 0$

Trois types d'opérations élémentaires sur les lignes de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Type 1 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

Type 2 Addition à une ligne d'un multiple d'une autre : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$

Type 3 Echange de deux lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$

$i \neq j$

Remarque

On définit de même des opérations élémentaires sur les colonnes.

Théorème 2 : Interprétation en termes de produits matriciel

Type 1

Effectuer $L_i \leftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P suivante

Théorème 2 : Interprétation en termes de produits matriciel

Type 1

Effectuer $L_i \leftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P suivante

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème 2 : Interprétation en termes de produits matriciel

Type 1

Effectuer $L_i \leftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P suivante

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Type 2

Effectuer $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ revient à multiplier A à gauche par P

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & j & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ i \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & \beta & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{array}$$

Théorème 2 : Interprétation en termes de produits matriciel

Type 1

Effectuer $L_i \leftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P suivante

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & j & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Type 2

Effectuer $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ revient à multiplier A à gauche par P

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & j & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & \beta & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{array}$$

Type 3

Effectuer $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Théorème 2 : Interprétation en termes de produits matriciel

Type 1

Effectuer $L_i \leftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P suivante

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & j & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Type 2

Effectuer $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ revient à multiplier A à gauche par P

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & j & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & \beta & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{array}$$

Type 3

Effectuer $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont :

Théorème 2 : Interprétation en termes de produits matriciel

Type 1

Effectuer $L_i \leftarrow \alpha L_i$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P suivante

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Type 2

Effectuer $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ revient à multiplier A à gauche par P

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & \beta & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

Type 3

Effectuer $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier A à gauche par la matrice P

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

3 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Opérer sur les lignes =
multiplier à gauche par une matrice inversible

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Opérer sur les lignes =
multiplier à gauche par une matrice inversible

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Exercice 3 : Situation modèle

On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires. Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

Opérer sur les lignes =
multiplier à gauche par une matrice inversible

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Exercice 3 : Situation modèle

On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires. Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

SF 2 : méthode du pivot pour calculer A^{-1}

Opérer sur les lignes =
multiplier à gauche par une matrice inversible

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Exercice 3 : Situation modèle

On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires.
Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

SF 2 : méthode du pivot pour calculer A^{-1}

- On transforme A en I_n par des opérations élémentaires.

Opérer sur les lignes =
multiplier à gauche par une matrice inversible

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Exercice 3 : Situation modèle

On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires. Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

SF 2 : méthode du pivot pour calculer A^{-1}

- On transforme A en I_n par des opérations élémentaires.
- On effectue en parallèle les mêmes opérations sur I_n.

Opérer sur les lignes =
multiplier à gauche par une matrice inversible

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Exercice 3 : Situation modèle

On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires. Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

SF 2 : méthode du pivot pour calculer A^{-1}

- On transforme A en I_n par des opérations élémentaires.
- On effectue en parallèle les mêmes opérations sur I_n.

Exemple 2 : Inversibilité et inverse de A

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Opérer sur les lignes =
multiplier à gauche par une matrice inversible

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Exercice 3 : Situation modèle

On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires. Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

SF 2 : méthode du pivot pour calculer A^{-1}

- On transforme A en I_n par des opérations élémentaires.
- On effectue en parallèle les mêmes opérations sur I_n.

Exemple 2 : Inversibilité et inverse de A

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

Opérer sur les lignes =
multiplier à gauche par une matrice inversible

Théorème 3

Les matrices d'opérations élémentaires sont : inversibles

Exercice 3 : Situation modèle

On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires. Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

SF 2 : méthode du pivot pour calculer A^{-1}

- On transforme A en I_n par des opérations élémentaires.
- On effectue en parallèle les mêmes opérations sur I_n.

Exercice 4

Montrer qu'une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls