Construction de l'ensemble des polyômes

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P$$

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P = 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

- Ensemble de définition ?

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P = 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

- Ensemble de définition ?
  - $\mathbb{R}$?

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P = 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

- Ensemble de définition ?
  - $\mathbb{R}$? $\mathbb{C}$?

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P = 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

- Ensemble de définition ?
  - $\mathbb{R}$? $\mathbb{C}$? $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P = 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P = 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P \underset{\text{déf.}}{=} 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

Quantités essentielles ?

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P \underset{\text{déf.}}{=} 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

Quantités essentielles : les coefficients

L'objet polynôme

Connu

- Notion de fonction polynomiale

$$P : x \mapsto 4 + 5x^2 - x^3 + x^5$$

Objectif

- Définir un objet polynôme

$$P = 4 + 5X^2 - X^3 + X^5$$

$$\underset{\text{déf.}}{=} [4\,,\,0\,,\,5\,,\,-1\,,\,0\,,\,1]$$

Quantités essentielles : les coefficients

Définition

Un polynôme est une **suite** de la forme $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$

Opérations sur les polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

- **Eléments :** suites

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$$

- **But :** Définir l'écriture :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

Opérations sur les polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

- **Eléments :** suites

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$$

- $X \underset{?}{=}$

$$P + Q \underset{?}{=}$$

$$P \times Q \underset{?}{=}$$

- **But :** Définir l'écriture :

$$P = a_n X^n \boxed{+} a_{n-1} \boxed{X^{n-1}} + \cdots + a_1 \boxed{X} + a_0$$

Opérations sur les polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

- **Eléments :** suites

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$$

- $X \underset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \dots)$

$$P + Q \underset{?}{=}$$

$$P \times Q \underset{?}{=}$$

- **But :** Définir l'écriture :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

Opérations sur les polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

- **Eléments :** suites

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

- $X \underset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \ldots)$
- **Opérations :** Pour

$P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$P + Q \underset{?}{=}$$

$$P \times Q \underset{?}{=}$$

- **But :** Définir l'écriture :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

Opérations sur les polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

- **Eléments :** suites

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$$

- $X \underset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \dots)$

- **Opérations :** Pour $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$P + Q \underset{\text{déf.}}{=} (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$P \times Q \underset{?}{=}$$

- **But :** Définir l'écriture :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} \boxed{X^{n-1}} + \cdots + a_1 X + a_0$$

Opérations sur les polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

- **Eléments :** suites

$$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$$

- $X \underset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \dots)$
- **Opérations :** Pour $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$P + Q \underset{\text{déf.}}{=} (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$P \times Q \underset{?}{=} (a_k b_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

- **But :** Définir l'écriture :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

Opérations sur les polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

- **Eléments :** suites

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

- $X \underset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 0, \ldots)$
- **Opérations :** Pour $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$P + Q \underset{\text{déf.}}{=} (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$P \times Q \underset{\text{déf.}}{=} (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

où : $\quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

- **But :** Définir l'écriture :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$(0, 1, 0, \dots)$	

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$(0, 1, 0, \ldots)$	X

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$(0, 1, 0, \ldots)$	X
$(\underset{\underset{0}{\uparrow}}{0}, \underset{\underset{1}{\uparrow}}{0}, \ldots, 0, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, 0, \ldots)$	

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$(0, 1, 0, \dots)$	X
$(\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{0}, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \dots)$	X^k

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$(0, 1, 0, \ldots)$	X
$(\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{0}, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \ldots)$	X^k
$(\lambda, 0, 0, \ldots)$	

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$(0, 1, 0, \dots)$	X
$(\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{0}, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \dots)$	X^k
$(\lambda, 0, 0, \dots)$	λ (polynôme constant)

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$(0, 1, 0, \dots)$	X
$(\underset{\underset{0}{\uparrow}}{0}, \underset{\underset{1}{\uparrow}}{0}, \dots, 0, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, 0, \dots)$	X^k
$(\lambda, 0, 0, \dots)$	λ (polynôme constant)
$(0, 0, 0, \dots)$	

Notation polynomiale

le polynôme ...	est noté ...
$P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$	$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
$(0, 1, 0, \dots)$	X
$(\underset{\substack{\uparrow\\0}}{0}, \underset{\substack{\uparrow\\1}}{0}, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow\\k}}{1}, 0, \dots)$	X^k
$(\lambda, 0, 0, \dots)$	λ (polynôme constant)
$(0, 0, 0, \dots)$	0 (polynôme nul)

L'anneau des polynômes

Opérations

Pour : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$

- **Somme**. $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$
- **Produit**. $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

L'anneau des polynômes

Opérations

Pour : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$

- **Somme**. $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$
- **Produit**. $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Théorème

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif

L'anneau des polynômes

Opérations

Pour : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$

- **Somme**. $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$
- **Produit**. $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Théorème

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif d'éléments neutres le polynôme nul 0 pour $+$ et le polynôme constant 1 pour $\times$.

L'anneau des polynômes

Opérations

Pour : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$

- **Somme**. $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$
- **Produit**. $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Exemple 1 : Calculer $P \times Q$

$$P = 4 - 2X \quad \text{et} \quad Q = 1 + 2X - 3X^2.$$

L'anneau des polynômes

Opérations

Pour : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$

- **Somme**. $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$
- **Produit**. $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Exemple 2

A partir de $(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$,

démontrer l'*identité de Vandermonde* : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.