Polynômes

Chapitre 16

I Divisibilité et division euclidienne

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=}$$

$P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Définition 1

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

1 Degré d'un polynôme

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Définition 1

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

- $\deg P = d$ signifie :

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\right\}$$

- $\deg P = d$ signifie : $\quad P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\right\}$$

- $\deg P = d$ signifie : $\quad P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad$ et $\quad a_d \neq 0.$

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\right\}$$

Coef. dominant de P

- $\deg P = d$ signifie : $\quad P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad$ et $\quad a_d \neq 0.$

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\right\}$$

Coef. dominant de P

- $\deg P = d$ signifie : $\quad P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad$ et $\quad a_d \neq 0.$

Remarque

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Coef. dominant de P

- $\deg P = d$ signifie : $\quad P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad$ et $\quad a_d \neq 0.$

Remarque

1. Par convention :

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

$P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Coef. dominant de P

- $\deg P = d$ signifie : $\quad P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad$ et $\quad a_d \neq 0.$

Remarque

1. Par convention : $\quad \deg 0 = -\infty$

1 Degré d'un polynôme

Définition 1

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\right\}$$

Coef. dominant de P

- $\deg P = d$ signifie : $\quad P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \quad$ et $\quad a_d \neq 0.$

Remarque

1. Par convention : $\quad \deg 0 = -\infty$
2. P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ssi :

1 Degré d'un polynôme

$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Définition 1

- Le degré de P est le plus grand indice n tel que a_n est non nul :

$$\deg P \underset{\text{déf.}}{=} \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Coef. dominant de P

- $\deg P = d$ signifie : $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $a_d \neq 0$.

Remarque

1. Par convention : $\deg 0 = -\infty$
2. P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ssi : $\deg P \leq n$.

1 Degré d'un polynôme

Remarque

1. Par convention $\deg 0 = -\infty$
2. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ssi $\deg P \leq n$

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=}$

1 Degré d'un polynôme

Remarque

1. Par convention $\deg 0 = -\infty$
2. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ssi $\deg P \leq n$

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

1 Degré d'un polynôme

Remarque

1. Par convention $\deg 0 = -\infty$
2. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ssi $\deg P \leq n$

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] =$

b) $\mathbb{K}_2[X] =$

1 Degré d'un polynôme

Remarque

1. Par convention $\deg 0 = -\infty$
2. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ssi $\deg P \leq n$

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$.

b) $\mathbb{K}_2[X] =$

1 Degré d'un polynôme

Remarque

1. Par convention $\deg 0 = -\infty$
2. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ssi $\deg P \leq n$

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$.

b) $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \ ; \ a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$.

b) $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \ ; \ a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

Théorème 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, non nuls.

- $\deg(P + Q)$
- $\deg PQ$

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$.

b) $\mathbb{K}_2[X] = \left\{aX^2 + bX + c \; ; \; a, b, c \in \mathbb{K}\right\}$.

Théorème 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, non nuls.

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
- $\deg PQ$

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$. b) $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \; ; \; a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

Théorème 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, non nuls.

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
- $\deg PQ$

il y a égalité si : $\deg P \neq \deg Q$

1 Degré d'un polynôme

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$.

b) $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \; ; \; a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

Théorème 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, non nuls.

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
- $\deg PQ = \deg P + \deg Q$

il y a égalité si : $\deg P \neq \deg Q$

1 Degré d'un polynôme

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$. b) $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \;;\; a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

encore vrai si $P = 0$ ou $Q = 0$
avec les conventions :
$-\infty \leq n$ et $-\infty + n = -\infty$

Théorème 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, non nuls.

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
- $\deg PQ = \deg P + \deg Q$

il y a égalité si :
$\deg P \neq \deg Q$

1 Degré d'un polynôme

Définition 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n : $\mathbb{K}_n[X] \underset{\text{déf.}}{=} \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\}$

Exemple 1

a) $\mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$. b) $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \,;\, a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

encore vrai si $P = 0$ ou $Q = 0$

avec les conventions :

$-\infty \leq n$ et $-\infty + n = -\infty$

Théorème 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, non nuls.

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
- $\deg PQ = \deg P + \deg Q$

il y a égalité si :

$\deg P \neq \deg Q$

Exercice 1

Démontrer les deux points du théorème.

Théorème 2 : $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$ alors :

Théorème 2 : $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$ alors : $P = 0$ ou $Q = 0$.

Théorème 2 : $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$ alors : $P = 0$ ou $Q = 0$.

Exercice 2

Démontrer ce théorème.

Théorème 2 : $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$ alors : $P = 0$ ou $Q = 0$.

Exercice 3 : Inversibles de $\mathbb{K}[X]$

Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

2 Composition

Définition 3

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme :

2 Composition

Définition 3

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme : $\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

2 Composition

Définition 3

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme : $\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

Exercice 4

On pose $P = X^3 + X + 1$ et $Q = X^2 - 1$. Calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

2 Composition

Définition 3

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme : $\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

Exercice 4

On pose $P = X^3 + X + 1$ et $Q = X^2 - 1$. Calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

Remarque

Si le polynôme Q n'est pas constant $\boxed{\deg(P \circ Q) = \quad}$

2 Composition

Définition 3

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme : $\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

Exercice 4

On pose $P = X^3 + X + 1$ et $Q = X^2 - 1$. Calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

Remarque

Si le polynôme Q n'est pas constant $\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q}$

2 Composition

Définition 3

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme : $\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.

Exercice 4

On pose $P = X^3 + X + 1$ et $Q = X^2 - 1$. Calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

Remarque

Si le polynôme Q n'est pas constant $\boxed{\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q}$

Exemple 2

Trouver tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^3) = X^2 P(X)$.

Définition 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou que A est un multiple de B si :

Définition 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou que A est un multiple de B si : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

3 Diviseurs, multiples

Définition 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou que A est un multiple de B si : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

On note $B \mid A$

Définition 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou que A est un multiple de B si : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

On note $B \mid A$

Exemple 3 : Justifier que :

a) $X^2 \mid X^6 + 4X^4 + 3X^2$.

b) $X - 5 \mid X^2 - 6X + 5$.

c) $X - 1 \mid X^n - 1$.

3 Diviseurs, multiples

Définition 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou que A est un multiple de B si : il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

On note $B \mid A$

Exercice 5 : Polynômes associés

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Etablir :

$$A \mid B \quad \text{et} \quad B \mid A \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid A = \lambda B$$

4 Division euclidienne

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1.
2.

4 Division euclidienne

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. $A = B\,Q + R$ 2.

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. $A = B\,Q + R$
2. $\deg R < \deg B$

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. $A = B\,Q + R$
2. $\deg R < \deg B$

reste

4 Division euclidienne

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. $A = B\,\underbrace{Q}_{\text{quotient}} + \underbrace{R}_{\text{reste}}$
2. $\deg R < \deg B$

4 Division euclidienne

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. $A = B\,Q + R$
2. $\deg R < \deg B$

quotient

reste

ou encore :
$\deg R \leq (\deg B) - 1$

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. $A = B\underbrace{Q}_{\text{quotient}} + \underbrace{R}_{\text{reste}}$
2. $\deg R < \deg B$

ou encore :
$\deg R \leq (\deg B) - 1$

4 Division euclidienne

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. $A = B\underbrace{Q}_{\text{quotient}} + \underbrace{R}_{\text{reste}}$
2. $\deg R < \deg B$

ou encore :
$\deg R \leq (\deg B) - 1$

Exemple 4 : et méthode

Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 - 5X^3 - X^2 + 6X - 4$ par $B = X^2 - 2$.

Théorème 3

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

1. $A = B\,Q + R$ 2. $\deg R < \deg B$

quotient

reste

ou encore :
$\deg R \leq (\deg B) - 1$

Exercice 6

Etablir l'unicité puis l'existence de ce couple de polynômes.

II Racines d’un polynôme

1 Evaluation d'un polynôme

Vocabulaire

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre :

1 Evaluation d'un polynôme

Vocabulaire

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre : $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

Vocabulaire

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Valeur de P en α

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre : $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

1 Evaluation d'un polynôme

Vocabulaire

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Valeur de P en α

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre : $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

Attention

Pour obtenir $P(3)$:

- on ne dit pas :
- on dit plutôt :

1 Evaluation d'un polynôme

Vocabulaire

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Valeur de P en α

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre : $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

☢ Attention ☢

Pour obtenir $P(3)$:

- on ne dit pas :
- on dit plutôt : on évalue en 3

Vocabulaire

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Valeur de P en α

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre : $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

☢ Attention ☢

Pour obtenir $P(3)$:

- on ne dit pas : on pose $X = 3$
- on dit plutôt : on évalue en 3

1 Evaluation d'un polynôme

Vocabulaire

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Valeur de P en α

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre : $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

Attention

Pour obtenir $P(3)$:

- on ne dit pas : on pose $X = 3$
- on dit plutôt : on évalue en 3

Remarque

On associe à $P \in \mathbb{K}[X]$ la *fonction polynomiale* $\widetilde{P} : x \mapsto P(x)$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

1 Evaluation d'un polynôme

Vocabulaire

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Valeur de P en α

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha)$ le nombre : $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$

☢ Attention ☢

Pour obtenir $P(3)$:

- on ne dit pas : on pose $X = 3$
- on dit plutôt : on évalue en 3

Remarque

On associe à $P \in \mathbb{K}[X]$ la *fonction polynomiale* $\widetilde{P} : x \mapsto P(x)$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

- $\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$
- $\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}$
- $\widetilde{P(Q)} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$

1 Evaluation d'un polynôme

Définition 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si :

Définition 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si : $P(a) = 0$.

1 Evaluation d'un polynôme

Définition 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si : $P(a) = 0$.

Exemple 1 : Quelles sont les racines de P dans $\mathbb{K}$?

a) $P = X + 3$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $P = X^2 + 1$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

c) $P = X^2 + 1$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

d) $P = 5$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

e) $P = X^n - 1$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Définition 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si : $P(a) = 0$.

SF 2 : Calculer le reste de la D.E. de A par B

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par :
a) $X^2 - 3X + 2$ b) $X^2 - 4X + 4$

2 Racines et divisibilité

Théorème 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. $\quad P(a) = 0$ ssi

Théorème 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. $P(a) = 0$ ssi $(X - a)$ divise P

Théorème 1

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. $P(a) = 0$ ssi $(X - a)$ divise P

Exercice 1

Démontrer ce théorème

2 Racines et divisibilité

Théorème 2 : Généralisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts

Théorème 2 : Généralisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts

$$P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0 \quad \text{ssi} \quad (X - a_1)\ldots(X - a_k) \text{ divise } P$$

Théorème 2 : Généralisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts

$$P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0 \quad \text{ssi} \quad (X - a_1)\ldots(X - a_k) \text{ divise } P$$

Exercice 2

Démontrer ce résultat par récurrence sur k.

Théorème 2 : Généralisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts

$$P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0 \quad \text{ssi} \quad (X - a_1)\ldots(X - a_k) \text{ divise } P$$

SF 3 : Obtenir une propriété de divisibilité à l'aide des racines

Exemple 3

Montrer que $P = (X-2)^8 + (X-1)^7 - 1$ est divisible par le polynôme $Q = X^2 - 3X + 2$.

Théorème 2 : Généralisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts

$$P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0 \quad \text{ssi} \quad (X - a_1)\ldots(X - a_k) \text{ divise } P$$

SF 3 : Obtenir une propriété de divisibilité à l'aide des racines

Exemple 4

Montrer que $1 + X + X^2$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$:

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$: P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$: P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$: P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$: P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$: P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors : $P = 0$

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$: P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

au moins

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors : $P = 0$

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$: P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

au moins

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors : $P = 0$

Conséquence

Si $P(a) = Q(a)$ en une infinité de valeurs $a \in \mathbb{K}$, alors $P = Q$.

3 Racines et degré

Théorème 3

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\deg P = n$: P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Démontrer le théorème.

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

au moins

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors : $P = 0$

i.e. P et Q ont les mêmes coefficients

Conséquence

Si $P(a) = Q(a)$ en une infinité de valeurs $a \in \mathbb{K}$, alors $P = Q$.

3 Racines et degré

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

au moins

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors : $\quad P = 0$

i.e. P et Q ont
les mêmes coefficients

Conséquence

Si $P(a) = Q(a)$ en une infinité de valeurs $a \in \mathbb{K}$, alors $P = Q$.

Exemple 5

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad P\left(e^x\right) = e^{2x} + e^x + 1.$
Calculer : $\quad P(-1) \quad$ et $\quad P(j)$

3 Racines et degré

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

au moins

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors : $\quad P = 0$

Conséquence

i.e. P et Q ont les mêmes coefficients

Si $P(a) = Q(a)$ en une infinité de valeurs $a \in \mathbb{K}$, alors $P = Q$.

Exemple 6

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sin x$$

3 Racines et degré

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

au moins

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors : $P = 0$

i.e. P et Q ont
les mêmes coefficients

Conséquence

Si $P(a) = Q(a)$ en une infinité de valeurs $a \in \mathbb{K}$, alors $P = Q$.

Exemple 7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.
Montrer que P est constant.

3 Racines et degré

SF 8 : utiliser les racines pour montrer que P est nul

au moins

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors : $\quad P = 0$

i.e. P et Q ont
les mêmes coefficients

Conséquence

Si $P(a) = Q(a)$ en une infinité de valeurs $a \in \mathbb{K}$, alors $P = Q$.

Exemple 8

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2 + 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2 + (-1)^n$

III Polynôme dérivé

1 Généralités

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$.

On définit le *polynôme dérivé* de P par :

1 Généralités

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$.

On définit le *polynôme dérivé* de P par : $\quad P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

1 Généralités

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$.

On définit le *polynôme dérivé* de P par : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$

1 Généralités

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$.

On définit le *polynôme dérivé* de P par : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Remarque

- $P' = 0$ ssi
- Si $\deg P \geq 1$: $\deg P' =$

1 Généralités

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$.

On définit le *polynôme dérivé* de P par : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Remarque

- $P' = 0$ ssi $P \in \mathbb{K}$.
- Si $\deg P \geq 1$: $\deg P' =$

1 Généralités

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$.

On définit le *polynôme dérivé* de P par : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$

Remarque

- $P' = 0$ ssi $P \in \mathbb{K}$.
- Si $\deg P \geq 1$: $\deg P' = (\deg P) - 1$

1 Généralités

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$.

On définit le *polynôme dérivé* de P par : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$

Remarque

- $P' = 0$ ssi $P \in \mathbb{K}$.
- Si $\deg P \geq 1$: $\deg P' = (\deg P) - 1$

Exercice 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que : $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Définition 1

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$.

On définit le *polynôme dérivé* de P par : $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$

Remarque

- $P' = 0$ ssi $P \in \mathbb{K}$.
- Si $\deg P \geq 1$: $\deg P' = (\deg P) - 1$

SF 2 : Calculer le reste de la division euclidienne de A par B

Exemple 1

Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 4X + 4$.

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Notation

On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P

- $P^{(0)} = P$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Notation

On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P

- $P^{(0)} = P$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} =$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Notation

On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P

- $P^{(0)} = P$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Notation

On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P

- $P^{(0)} = P$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- *Formule de Leibniz.* $\quad (PQ)^{(n)} =$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Notation

On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P

- $P^{(0)} = P$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- *Formule de Leibniz.* $\quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- *Formule de Leibniz.* $(PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Théorème 2 : Formule de Taylor polynomiale

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $P =$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- *Formule de Leibniz.* $(PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Théorème 2 : Formule de Taylor polynomiale

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \qquad (X-a)^k$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- *Formule de Leibniz.* $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Théorème 2 : Formule de Taylor polynomiale

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- *Formule de Leibniz.* $(PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Théorème 2 : Formule de Taylor polynomiale

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

combinaison linéaire de $1, (X-a), \ldots, (X-a)^n$

2 Polynômes dérivés d'ordres supérieurs

Théorème 1 : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
- *Formule de Leibniz.* $\quad (PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Théorème 2 : Formule de Taylor polynomiale

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $\quad P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$

combinaison linéaire de $1, (X-a), \ldots, (X-a)^n$

Exercice 2

Démontrer la formule par récurrence sur n.

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X - a)^m \mid P$.

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.
Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.

Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P$

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.

Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P \quad \text{et} \quad (X-a)^{m+1} \nmid P$

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.

Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P \quad \text{et} \quad (X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore :

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.
Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P \quad$ et $\quad (X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore : si $\quad P = (X-a)^m Q$

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.
Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P \quad$ et $\quad (X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore : si $\quad P = (X-a)^m Q \quad$ où $Q(a) \neq 0$.

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.
Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore : si $P = (X-a)^m Q$ où $Q(a) \neq 0$.

Exercice 3

Justifier l'existence d'un plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.
Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P \quad$ et $\quad (X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore : si $\quad P = (X-a)^m Q \quad$ où $Q(a) \neq 0$.

Exemple 2 : et vocabulaire

$P = (X-1)^2(X-3)(X+5)^3$ possède trois racines : 1 , 3 et -5

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.
Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore : si $P = (X-a)^m Q$ où $Q(a) \neq 0$.

racine double (*i.e.* d'ordre 2)

Exemple 2 : et vocabulaire

$P = (X-1)^2(X-3)(X+5)^3$ possède trois racines : 1 , 3 et -5

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.

Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore : si $P = (X-a)^m Q$ où $Q(a) \neq 0$.

racine double (*i.e.* d'ordre 2)

Exemple 2 : et vocabulaire

$P = (X-1)^2(X-3)(X+5)^3$ possède trois racines : 1 , 3 et -5

racine simple (*i.e.* d'ordre 1)

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.
Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore : si $P = (X-a)^m Q$ où $Q(a) \neq 0$.

Exemple 2 : et vocabulaire

racine double (*i.e.* d'ordre 2)

racine triple (*i.e.* d'ordre 3)

$P = (X-1)^2(X-3)(X+5)^3$ possède trois racines : 1 , 3 et -5

racine simple (*i.e.* d'ordre 1)

3 Multiplicité d'une racine

Définition 2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m \mid P$.

Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si :

- $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$
- ou encore : si $P = (X-a)^m Q$ où $Q(a) \neq 0$.

Exemple 2 : et vocabulaire

$P = (X-1)^2(X-3)(X+5)^3$ possède trois racines : 1 , 3 et -5

racine double (*i.e.* d'ordre 2)

racine triple (*i.e.* d'ordre 3)

racine simple (*i.e.* d'ordre 1)

Exemple 3

Comment trouver la multiplicité de 1 dans

$$P = X^5 - 4X^2 + 3X \qquad ?$$

3 Multiplicité d'une racine

Théorème 3 : Généralisation des résultats du II

- Si $a_1, \ldots, a_k$ sont racines distinctes de P de multiplicités au moins $m_1, \ldots, m_k$:

3 Multiplicité d'une racine

Théorème 3 : Généralisation des résultats du II

- Si $a_1, \ldots, a_k$ sont racines distinctes de P de multiplicités au moins $m_1, \ldots, m_k$: $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - a_i)^{m_i}$ divise P.

3 Multiplicité d'une racine

Théorème 3 : Généralisation des résultats du II

- Si $a_1, ..., a_k$ sont racines distinctes de P de multiplicités au moins $m_1, ..., m_k$: $\prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$ divise P.
- Si $\deg P = n$:

3 Multiplicité d'une racine

Théorème 3 : Généralisation des résultats du II

- Si $a_1, \ldots, a_k$ sont racines distinctes de P de multiplicités au moins $m_1, \ldots, m_k$: $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - a_i)^{m_i}$ divise P.
- Si $\deg P = n$: P a au plus n racines comptées avec multiplicité.

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On pose : $A = (X - a)^m$.
Calculer $A^{(k)}$. Que vaut $A^{(k)}(a)$?

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On pose : $A = (X - a)^m$.
Calculer $A^{(k)}$. Que vaut $A^{(k)}(a)$?

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On pose : $A = (X - a)^m$.
Calculer $A^{(k)}$. Que vaut $A^{(k)}(a)$?

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On pose : $A = (X - a)^m$.
Calculer $A^{(k)}$. Que vaut $A^{(k)}(a)$?

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Exemple 3

Trouver la multiplicité de 1 dans $P = X^5 - 4X^2 + 3X$.

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. On pose : $A = (X - a)^m$.
Calculer $A^{(k)}$. Que vaut $A^{(k)}(a)$?

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Exercice 5 : Ex. 85.1, banque INP

Démontrer l'équivalence du théorème ci-dessus.

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$

Conséquences

- a est racine simple de P ssi $\boxed{P(a) = 0 \quad \text{et} \quad P'(a) \neq 0}$
- Si a est de multiplicité $m \geq 1$ dans P alors a est de multiplicité $m - 1$ dans P'

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$

Conséquences

- a est racine simple de P ssi $\boxed{P(a) = 0 \quad \text{et} \quad P'(a) \neq 0}$
- Si a est de multiplicité $m \geq 1$ dans P alors a est de multiplicité $m - 1$ dans P'

Exemple 4

Soit $n \geq 1$. Montrer que $X^n - 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$

Théorème 5

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
$(X - a)^m$ divise P ssi :

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$

Théorème 5

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
$(X - a)^m$ divise P ssi : $P(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0.$

Exercice 5 : Ex. 85.2, banque INP

Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = X^5 + aX^2 + bX$ soit divisible par $(X - 1)^2$.

4 Polynômes dérivés et racines multiples

Théorème 4

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

i) a est racine de P de multiplicité m

ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$

Théorème 6

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
$(X-a)^m$ divise P ssi : $\quad P(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0.$

Exemple 5

Montrer que $(X^2+1)^2$ divise $X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

IV Polynômes scindés et relations entre coefficients et racines

1 Polynômes scindés

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est *scindé sur* $\mathbb{K}$ si :

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1

  i.e. : $P =$

- C'est équivalent à :

1 Polynômes scindés

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est *scindé sur* $\mathbb{K}$ si :

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1

  i.e. : $\quad P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$
- C'est équivalent à :

1 Polynômes scindés

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est *scindé* coefficient dominant

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1

  i.e. : $\quad P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$

- C'est équivalent à :

1 Polynômes scindés

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est *scindé*

coefficient dominant

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1

  i.e. : $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$

  racines
  (éventuellement confondues)

- C'est équivalent à :

1 Polynômes scindés

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est *scindé* coefficient dominant

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1

  i.e. : $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$

  racines
  (éventuellement confondues)

- C'est équivalent à : P a n racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec multiplicité

1 Polynômes scindés

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est *scindé* sur $\mathbb{K}$ si :

coefficient dominant

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1

  i.e. : $\quad P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$

  racines (éventuellement confondues)

- C'est équivalent à : P a n racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec multiplicité

Exemple 1

Les polynômes suivants sont-ils scindés sur $\mathbb{R}$?

a) $P = X^4 - 2X^2 + 1$. b) $Q = X^3 - 1$

1 Polynômes scindés

Définition 1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est *scindé*

coefficient dominant

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1

  i.e. : $$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$$

  racines (éventuellement confondues)

- C'est équivalent à : P a n racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec multiplicité

Exemple 2

a) $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)}$ b) $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)}$

Théorème 1 : d'Alembert-Gauss (Admis)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède :

En conséquence :

1 Polynômes scindés

Théorème 1 : d'Alembert-Gauss (Admis)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède :au moins une racine complexe.

En conséquence :

1 Polynômes scindés

Théorème 1 : d'Alembert-Gauss (Admis)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède :au moins une racine complexe.

En conséquence : tout polynôme constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$

1 Polynômes scindés

Théorème 1 : d'Alembert-Gauss (Admis)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède :au moins une racine complexe.

En conséquence : tout polynôme constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$

Exercice 1

Démontrer la conséquence par récurrence sur le degré à l'aide du théorème de d'Alembert-Gauss

2 Relations entre coefficients et racines

Cadre

$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n(X - z_1)\dots(X - z_n)$ est scindé sur $\mathbb{K}$ de degré n

2 Relations entre coefficients et racines

Lien entre
$(a_0, \ldots, a_n)$ et $(z_1, \ldots, z_n)$?

Cadre

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n(X - z_1)\ldots(X - z_n) \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ de degré } n$$

Rappel : le cas $n = 2$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :
- $z_1 + z_2 =$
- $z_1 z_2 =$

Rappel : le cas $n = 2$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 =$

Rappel : le cas $n = 2$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Rappel : le cas $n = 2$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont

Rappel : le cas $n = 2$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de $X^2 - sX + p$

Cas particulier important : le cas $n = 3$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de $X^2 - sX + p$

Théorème 2 : Le cas $n = 3$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$:

-
-
-

Cas particulier important : le cas $n = 3$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de $X^2 - sX + p$

Théorème 2 : Le cas $n = 3$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$:

- $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a}$
-
-

Cas particulier important : le cas $n = 3$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de $X^2 - sX + p$

Théorème 2 : Le cas $n = 3$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$:

- $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{c}{a}$
-

Cas particulier important : le cas $n = 3$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors :
- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de $X^2 - sX + p$

Théorème 2 : Le cas $n = 3$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$:

- $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{c}{a}$
- $z_1 z_2 z_3 = -\frac{d}{a}$

Cas particulier important : le cas $n = 3$

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$

alors : ▪ $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ ▪ $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Résoudre un système non linéaire

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont les racines de $X^2 - sX + p$

Théorème 2 : Le cas $n = 3$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$:

- $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{c}{a}$
- $z_1 z_2 z_3 = -\frac{d}{a}$

Exercice 2

Etablir ces relations en développant l'expression factorisée de P.

Cas particulier important : le cas $n = 3$

Théorème 2 : Le cas $n = 3$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$:

- $z_1 + z_2 + z_3 = -\dfrac{b}{a}$
- $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \dfrac{c}{a}$
- $z_1z_2z_3 = -\dfrac{d}{a}$

SF 5 : Résoudre un système non linéaire

Les solutions de

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = \alpha \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \beta \\ z_1z_2z_3 = \gamma \end{cases}$$

sont :

Cas particulier important : le cas $n = 3$

Théorème 2 : Le cas $n = 3$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$:

- $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a}$
- $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{c}{a}$
- $z_1z_2z_3 = -\frac{d}{a}$

SF 5 : Résoudre un système non linéaire

Les solutions de

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = \alpha \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \beta \\ z_1z_2z_3 = \gamma \end{cases}$$

sont : les racines de $X^3 - \alpha X^2 + \beta X - \gamma$.

Cas particulier important : le cas $n = 3$

SF 5 : Résoudre un système non linéaire

Les solutions de

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = \alpha \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \beta \\ z_1 z_2 z_3 = \gamma \end{cases}$$

sont : les racines de $X^3 - \alpha X^2 + \beta X - \gamma$.

Exemple 3

Résoudre $\quad (S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + xz = -2 \\ xyz = -1 \end{cases} \quad$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Le cas général

A partir de : $$(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$$

Théorème 2

- $z_1 + z_2 + \cdots + z_n =$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n =$
- $z_1 z_2 \dots z_n =$

Le cas général

A partir de : $\quad (X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

- $z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n =$
- $z_1 z_2 \dots z_n =$

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2 coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n =$
- $z_1 z_2 \dots z_n =$

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n =$

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n =$

coef. de X^{n-2}

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

coef. de X^{n-2}

Le cas général

A partir de : $$(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

coef. de X^{n-2}

coef. constant

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

coef. de X^{n-2}

coef. constant

Remarque

Plus généralement pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

Le cas général

A partir de : $\quad (X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

coef. de X^{n-2}

coef. constant

Remarque

Plus généralement pour tout $k \in [\![1\,, n]\!]$:

$$\sum \qquad z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}$$

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

coef. de X^{n-2}

coef. constant

Remarque

Plus généralement pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$:

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}$$

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

coef. de X^{n-2}

coef. constant

Remarque

Plus généralement pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_k}$$

Le cas général

A partir de : $\quad (X-z_1)(X-z_2)\dots(X-z_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

coef. de X^{n-1}

- $z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

coef. de X^{n-2}

coef. constant

Remarque

Plus généralement pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

coef. de X^{n-k}

$$\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_k}$$

Le cas général

A partir de : $(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$

Théorème 2

- $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

Remarque

Plus généralement pour tout $k \in [\![1\,,n]\!]$:

noté σ_k : k^{e} fonction symétrique de $z_1, \dots, z_n$

coef. de X^{n-k}

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_k}$$

Le cas général

A partir de : $$(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k$$

Théorème 2

- $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

Remarque

Plus généralement pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\underbrace{\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}}_{\text{noté } \sigma_k \text{ : } k^{\text{e}} \text{ fonction symétrique de } z_1, \dots, z_n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k} = \underbrace{(-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_k}}_{\text{coef. de } X^{n-k}}$$

Formules de Viète

Le cas général

Théorème 3

- $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 \ldots z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

Remarque

Plus généralement pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

noté σ_k : k^{e} fonction symétrique de $z_1, \ldots, z_n$

coef. de X^{n-k}

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_k} = (-1)^{n-k} \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Formules de Viète

Exemple 4

Soit $n \geq 2$. En considérant $P = X^n - 1$, calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

V Interpolation de Lagrange

Problème de l'interpolation

Données

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
- $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques

Problème de l'interpolation

Données

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
- $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques

Problème de l'interpolation

Trouver un polynôme dont la courbe passe par les points (x_k, y_k) *i.e.* trouver $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $\quad P(x_1) = y_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad P(x_n) = y_n.$

▸ Figure

Polynômes de Lagrange associés à $x_1, x_2, \dots, x_n$

Définition 1

Pour $i \in [\![1\,,n]\!]$, on définit le polynôme L_i par :

Ce polynôme vérifie :

-
-

Polynômes de Lagrange associés à $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Définition 1

Pour $i \in [\![1\,, n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i = \prod \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$

Ce polynôme vérifie :

-
-

Polynômes de Lagrange associés à $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Définition 1

Pour $i \in [\![1\,,n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

Ce polynôme vérifie :

-
-

Polynômes de Lagrange associés à $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\deg L_i = n - 1$

Définition 1

Pour $i \in [\![1\,,n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

Ce polynôme vérifie :

-
-

Polynômes de Lagrange associés à $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\deg L_i = n - 1$

Définition 1

Pour $i \in [\![1\,,n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

Ce polynôme vérifie :

- $L_i(x_i) = 1$
-

Polynômes de Lagrange associés à $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\deg L_i = n - 1$

Définition 1

Pour $i \in [\![1\,, n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

Ce polynôme vérifie :

- $L_i(x_i) = 1$
- $L_i(x_k) = 0$ pour tout $k \neq i$

Polynômes de Lagrange associés à $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\deg L_i = n - 1$

Définition 1

Pour $i \in [\![1\,,n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

Ce polynôme vérifie :

- $L_i(x_i) = 1$
- $L_i(x_k) = 0$ pour tout $k \neq i$

Exemple 1

Calculer L_1 et L_3 dans le cas où $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ et $x_4 = 4$.

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

Ce polynôme est donné par :

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par :

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par :

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par : $\displaystyle P = \sum_{i=1}^{n} L_i.$

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,, n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par : $\quad P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i.$

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par : $$P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i .$$

Exercice 1 : Ex. 87.1, banque INP

Démontrer le théorème

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par : $\displaystyle P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i.$

Exemple 2 : Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

1. $P(1) = 1, \quad P(2) = 0, \quad P(3) = -1 \quad$ et $\quad P(4) = 0.$

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par : $\displaystyle P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i.$

Exemple 2 : Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

1. $P(1) = 1, \quad P(2) = 0, \quad P(3) = -1$ et $P(4) = 0.$
2. $P(1) = 1, \quad P(2) = 4, \quad P(3) = 9$ et $P(4) = 16.$

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par : $\quad P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i.$

Exemple 3 : Ex. 87.3, banque INP

Simplifier : a) $\sum_{i=1}^{n} L_i$

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par : $$P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i.$$

Exemple 3 : Ex. 87.3, banque INP

Simplifier : b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Théorème 1

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :
$\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad P(x_k) = y_k$

Ce polynôme est donné par : $$P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i.$$

Exemple 3 : Ex. 87.3, banque INP

Simplifier : c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p L_i$ pour tout $p \in [\![0\,,n-1]\!]$