Groupes et Anneaux

Chapitre 15

I Lois de composition interne

1 Définition et propriétés des lois de composition interne

1 Définition et propriétés des lois de composition interne

Ensemble non vide

Définition 1

Une *loi de composition interne sur* E est :

1 Définition et propriétés des lois de composition interne

Ensemble non vide

Définition 1

Une *loi de composition interne sur* E est : une application de $E \times E$ dans E.

1 Définition et propriétés des lois de composition interne

Ensemble non vide

Définition 1

Une *loi de composition interne sur* E est : une application de $E \times E$ dans E.

Exemple 1

Donner une loi de composition interne sur :

a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathscr{P}(E)$ d) $\mathscr{F}(E, E)$

1 Définition et propriétés des lois de composition interne

Loi « générique » sur E

Définition 2

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite :

- Commutative si :
- Associative si :

Loi « générique » sur E

Définition 2

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite :

- Commutative si : $\forall x, y \in E, \quad x \star y = y \star x.$
- Associative si :

Loi « générique » sur E

Définition 2

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite :

- Commutative si : $\forall x, y \in E, \quad x \star y = y \star x.$
- Associative si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

Définition 2

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite :

- Commutative si : $\forall x, y \in E, \quad x \star y = y \star x.$
- Associative si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

noté $x \star y \star z$

Définition 2

Une loi de composition interne $\star$ sur E est dite :

- Commutative si : $\forall x, y \in E, \quad x \star y = y \star x.$
- Associative si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

noté $x \star y \star z$

Exemple 2

Sont-elles associatives ? commutatives ?

a) L'addition sur $\mathbb{N}$

b) La soustraction sur $\mathbb{Z}$

c) La réunion sur $\mathscr{P}(E)$

d) La composition sur $\mathscr{F}(E, E)$

1 Définition et propriétés des lois de composition interne

Notation

Si $\star$ est associative l'élément $\underbrace{x \star x \star \cdots \star x}_{n \text{ fois}}$ est noté :

-
-

Notation

Si $\star$ est associative l'élément $\underbrace{x \star x \star \cdots \star x}^{n \text{ fois}}$ est noté :

- ou bien x^n
-

Notation

Si $\star$ est associative l'élément $\underbrace{x \star x \star \cdots \star x}_{n \text{ fois}}$ est noté :

- ou bien x^n
- ou bien nx

Notation

Si $\star$ est associative l'élément $\underbrace{x \star x \star \cdots \star x}_{n \text{ fois}}$ est noté :

- ou bien x^n
- ou bien nx

Définition 3

Soit $(E, \star)$ et $(F, \cdot)$ deux ensembles munis de lois de composition interne. On pose pour tous $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$:

$$(x, y) \times (x', y') \underset{\text{déf.}}{=}$$

n fois

Notation

Si $\star$ est associative l'élément $x \star x \star \cdots \star x$ est noté :

- ou bien x^n
- ou bien nx

Définition 3

Soit $(E, \star)$ et $(F, \cdot)$ deux ensembles munis de lois de composition interne. On pose pour tous $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$:

$$(x, y) \times (x', y') \underset{\text{déf.}}{=} (x \star x' \ , \ y \cdot y')$$

Notation

Si $\star$ est associative l'élément $\underbrace{x \star x \star \cdots \star x}_{n \text{ fois}}$ est noté :

- ou bien x^n
- ou bien nx

Définition 3

Soit $(E, \star)$ et $(F, \cdot)$ deux ensembles munis de lois de composition interne. On pose pour tous $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$:

$$(x, y) \times (x', y') \underset{\text{déf.}}{=} (x \star x' \ , \ y \cdot y')$$

Exercice 1

Montrer que si $\star$ et $\cdot$ sont associatives, la loi produit $\times$ l'est aussi.

2 Propriétés des éléments

LCI sur E

Définition 4

On dit que $e \in E$ est un élément neutre pour $\star$ si :

LCI sur E

Définition 4

On dit que $e \in E$ est un élément neutre pour $\star$ si :

$$\forall x \in E, \quad x \star e = e \star x = x$$

LCI sur E

Définition 4

On dit que $e \in E$ est un élément neutre pour $\star$ si :

$$\forall x \in E, \quad x \star e = e \star x = x$$

Exemple 3 : Donner l'élément neutre

a) $(\mathbb{R}, +)$ b) $(\mathbb{R}, \times)$ c) $(\mathscr{P}(E), \cap)$ d) $(\mathscr{P}(E), \cup)$ e) $(\mathscr{F}(E,E), \circ)$

LCI sur E

Définition 4

On dit que $e \in E$ est un élément neutre pour $\star$ si :

$$\forall x \in E, \quad x \star e = e \star x = x$$

Exemple 3 : Donner l'élément neutre

a) $(\mathbb{R}, +)$ b) $(\mathbb{R}, \times)$ c) $(\mathscr{P}(E), \cap)$ d) $(\mathscr{P}(E), \cup)$ e) $(\mathscr{F}(E,E), \circ)$

Exercice 2 : Unicité de l'élément neutre

Montrer que s'il existe un élément neutre pour $\star$, alors il est unique.

2 Propriétés des éléments

Remarque

Par convention : $x^0 =$

2 Propriétés des éléments

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

2 Propriétés des éléments

- dans $(\mathbb{R}, \times)$:

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

- dans $(\mathbb{R}, \times)$: $x^0 = 1$

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

2 Propriétés des éléments

- dans $(\mathbb{R}, \times)$: $x^0 = 1$
- dans $(\mathbb{R}, +)$:

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

2 Propriétés des éléments

- dans $(\mathbb{R}, \times)$: $x^0 = 1$
- dans $(\mathbb{R}, +)$: $0x = 0$

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

2 Propriétés des éléments

- dans $(\mathbb{R}, \times)$: $x^0 = 1$
- dans $(\mathbb{R}, +)$: $0x = 0$
- dans $(\mathscr{F}(E, E), \circ)$:

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

- dans $(\mathbb{R}, \times)$: $x^0 = 1$
- dans $(\mathbb{R}, +)$: $0x = 0$
- dans $(\mathscr{F}(E, E), \circ)$: $f^0 = \mathrm{Id}_E$

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

2 Propriétés des éléments

- dans $(\mathbb{R}, \times)$: $x^0 = 1$
- dans $(\mathbb{R}, +)$: $0x = 0$
- dans $(\mathscr{F}(E, E), \circ)$: $f^0 = \mathrm{Id}_E$

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

Définition 5

Un élément x de E est dit inversible pour $\star$ si

2 Propriétés des éléments

- dans $(\mathbb{R}, \times)$: $x^0 = 1$
- dans $(\mathbb{R}, +)$: $0x = 0$
- dans $(\mathscr{F}(E, E), \circ)$: $f^0 = \mathrm{Id}_E$

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

LCI sur E possédant un neutre e

Définition 5

Un élément x de E est dit inversible pour $\star$ si

- dans $(\mathbb{R}, \times)$: $x^0 = 1$
- dans $(\mathbb{R}, +)$: $0x = 0$
- dans $(\mathscr{F}(E,E), \circ)$: $f^0 = \mathrm{Id}_E$

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

LCI sur E possédant un neutre e

Définition 5

Un élément x de E est dit inversible pour $\star$ si il existe $x' \in E$ tel que : $\quad x \star x' = x' \star x = e$.

2 Propriétés des éléments

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

LCI sur E possédant un neutre e

Définition 5

Un élément x de E est dit inversible pour $\star$ si il existe $x' \in E$ tel que : $\quad x \star x' = x' \star x = e$.

Un inverse de x

Remarque

Par convention : $x^0 = e$

LCI sur E possédant un neutre e

Définition 5

Un élément x de E est dit inversible pour $\star$ si il existe $x' \in E$ tel que : $x \star x' = x' \star x = e$.

Un inverse de x

Exemple 4 : Donner les éléments inversibles

a) $(\mathbb{Z}, +)$ b) $(\mathbb{N}, +)$ c) $(\mathbb{R}, \times)$ d) $(\mathbb{Z}, \times)$ e) $(\mathscr{F}(E, E), \circ)$

2 Propriétés des éléments

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

2 Propriétés des éléments

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

ii) x^{-1} est inversible et :

2 Propriétés des éléments

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

ii) x^{-1} est inversible et : $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

ii) x^{-1} est inversible et : $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$

iii) $x \star y$ est inversible et :

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e.
Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

ii) x^{-1} est inversible et : $\quad \left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$

iii) $x \star y$ est inversible et : $\quad (x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}.$

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

ii) x^{-1} est inversible et : $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

iii) $x \star y$ est inversible et : $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

iv) x^n est inversible et :

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

ii) x^{-1} est inversible et : $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$

iii) $x \star y$ est inversible et : $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}.$

iv) x^n est inversible et : $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$

2 Propriétés des éléments

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e.
Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

ii) x^{-1} est inversible et : $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

iii) $x \star y$ est inversible et : $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

iv) x^n est inversible et : $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$

noté x^{-n}

Théorème 1 : Propriétés des éléments inversibles

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$.

i) x possède un unique inverse

ii) x^{-1} est inversible et : $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

iii) $x \star y$ est inversible et : $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

iv) x^n est inversible et : $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$

noté x^{-n}

Exercice 3

Démontrer les points *i)* et *iii)* du théorème.

3 Permutations

Définition 6

Une *permutation* de E est :

3 Permutations

Définition 6

Une *permutation* de E est : une bijection de E sur E.

3 Permutations

Ensemble noté S_E

Définition 6

Une *permutation* de E est : une bijection de E sur E.

3 Permutations

Ensemble noté S_E

Définition 6

Une *permutation* de E est : une bijection de E sur E.

Exercice 4

Montrer que la composition est une loi de composition interne sur S_E

3 Permutations

Ensemble noté S_E

Définition 6

Une *permutation* de E est : une bijection de E sur E.

Exercice 4

Montrer que la composition est une loi de composition interne sur S_E

Exemple 5

On suppose que $\star$ est associative et possède un élément neutre e. Soit $a \in E$, inversible. Montrer que les applications

$$\gamma_a : x \mapsto a \star x \qquad \text{et} \qquad \delta_a : x \mapsto x \star a$$

sont des permutations de E.

II Groupes

1 Généralités

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

1 Généralités

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

i) $\star$ est associative ;

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

i) $\star$ est associative ;

ii) $(G, \star)$ a un élément neutre ;

1 Généralités

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

i) $\star$ est associative ;

ii) $(G, \star)$ a un élément neutre ;

iii) Tout élément de G est inversible.

1 Généralités

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

i) $\star$ est associative ;

ii) $(G, \star)$ a un élément neutre ;

iii) Tout élément de G est inversible.

Si de plus, $\star$ est commutative, on dit que G est commutatif.

1 Généralités

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

i) $\star$ est associative ;

ii) $(G, \star)$ a un élément neutre ;

iii) Tout élément de G est inversible.

Si de plus, $\star$ est commutative, on dit que G est commutatif.

Exemple 1 : Sont-ils des groupes ?

1. a) $(\mathbb{N}, +)$ b) $(\mathbb{Z}, +)$ c) $(\mathbb{Q}, +)$ d) $(\mathbb{R}, +)$ e) $(\mathbb{C}, +)$

1 Généralités

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

i) $\star$ est associative ;

ii) $(G, \star)$ a un élément neutre ;

iii) Tout élément de G est inversible.

Si de plus, $\star$ est commutative, on dit que G est commutatif.

Exemple 1 : Sont-ils des groupes ?

2. a) $(\mathbb{R}, \times)$ b) $(\mathbb{R}^*, \times)$ c) $(\mathbb{C}^*, \times)$ d) $(\mathbb{Z}^*, \times)$

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

i) $\star$ est associative ;

ii) $(G, \star)$ a un élément neutre ;

iii) Tout élément de G est inversible.

Si de plus, $\star$ est commutative, on dit que G est commutatif.

Exemple 1 : Sont-ils des groupes ?

3. a) $(\mathscr{F}(E,E), \circ)$ b) $(S_E, \circ)$

Définition 1

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe si :

i) $\star$ est associative ;

ii) $(G, \star)$ a un élément neutre ;

iii) Tout élément de G est inversible.

Si de plus, $\star$ est commutative, on dit que G est commutatif.

$(x, y) \times (x', y') \underset{\text{déf.}}{=} (x \star x' \ , \ y \cdot y')$

Exercice 1

Montrer que si $(G, \star)$ et $(G', \cdot)$ sont des groupes, alors $G \times G'$ est un groupe pour la loi produit .

Partie de G

$(G, \star)$
est un groupe

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

Partie de G

$(G, \star)$
est un groupe

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

i) H est non vide

2 Sous-groupes

Partie de G

$(G, \star)$
est un groupe

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

i) H est non vide

ii) H est stable par $\star$:

2 Sous-groupes

Partie de G

$(G, \star)$
est un groupe

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

i) H est non vide

ii) H est stable par $\star$: $\quad \forall x, y \in H, \quad x \star y \in H$

Partie de G

$(G, \star)$
est un groupe

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

i) H est non vide

ii) H est stable par $\star$: $\quad \forall x, y \in H, \quad x \star y \in H$

iii) H est stable par passage à l'inverse :

Partie de G

$(G, \star)$
est un groupe

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

i) H est non vide

ii) H est stable par $\star$: $\quad \forall x, y \in H, \quad x \star y \in H$

iii) H est stable par passage à l'inverse : $\quad \forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$

Partie de G

$(G, \star)$ est un groupe

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

i) H est non vide

ii) H est stable par $\star$: $\quad \forall x, y \in H, \quad x \star y \in H$

iii) H est stable par passage à l'inverse : $\quad \forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$

Exemple 2 : Vrai ou faux ?

a) $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

b) $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

Partie de G

$(G, \star)$
est un groupe

Définition 2

On dit que H est un sous-groupe de G si :

i) H est non vide

ii) H est stable par $\star$: $\quad \forall x, y \in H, \quad x \star y \in H$

iii) H est stable par passage à l'inverse : $\quad \forall x \in H, \quad x^{-1} \in H$

Exercice 2

Soit H un sous-groupe de G. On note e l'élément neutre de G.
Montrer que : $\quad e \in H$.

2 Sous-groupes

Théorème 1

Si H est un sous-groupe de G, alors $(H, \star)$ est :

Théorème 1

Si H est un sous-groupe de G, alors $(H, \star)$ est : un groupe.

Théorème 1

Si H est un sous-groupe de G, alors $(H, \star)$ est : un groupe.

Exercice 3

Démontrer le théorème

Théorème 1

Si H est un sous-groupe de G, alors $(H, \star)$ est : un groupe.

SF 1 : pour montrer que G est groupe

On peut montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe de référence

Exemple 3

a) Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe.

b) Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous groupe de $\mathbb{U}$.

3 Morphismes de groupes

Cadre

$$(G, \cdot) \xrightarrow{f} (G', \star)$$

Définition 3

f est un *morphisme de groupes* si :

3 Morphismes de groupes

Cadre

$$(G, \cdot) \xrightarrow{f} (G', \star)$$

Définition 3

f est un *morphisme de groupes* si :

$$\forall x, y \in G, \qquad f(x \cdot y) = f(x) \star f(y)$$

3 Morphismes de groupes

Cadre

$$(G, \cdot) \xrightarrow{f} (G', \star)$$

Définition 3

f est un *morphisme de groupes* si :

$$\forall x, y \in G, \qquad f(x \cdot y) = f(x) \star f(y)$$

isomorphisme
=
morphisme + bijectif

3 Morphismes de groupes

Cadre

$$(G,\cdot) \xrightarrow{f} (G',\star)$$

Définition 3

f est un *morphisme de groupes* si :

$$\forall x, y \in G, \qquad f(x \cdot y) = f(x) \star f(y)$$

isomorphisme
=
morphisme + bijectif

Exemple 4

a) $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \times)$ est un morphisme de groupes

b) $\ln : (\mathbb{R}_+^*, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ est un morphisme de groupes

Cadre

$$(G, \cdot) \xrightarrow{f} (G', \star)$$

Définition 3

f est un *morphisme de groupes* si :

$$\forall x, y \in G, \qquad f(x \cdot y) = f(x) \star f(y)$$

isomorphisme
=
morphisme + bijectif

Exercice 4

Montrer : a) $\boxed{f(e) = e'}$ b) $\forall x \in G,$ $\boxed{f(x^{-1}) = f(x)^{-1}}$

3 Morphismes de groupes

Définition 4

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de e' par f :

Définition 4

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de e' par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$

3 Morphismes de groupes

Définition 4

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de e' par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble :
$$\operatorname{Im} f \underset{\text{déf.}}{=} f(G) =$$

Définition 4

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de e' par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble :

$$\operatorname{Im} f \underset{\text{déf.}}{=} f(G) = \{f(x)\ ;\ x \in G\}$$

3 Morphismes de groupes

Définition 4

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de e' par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble :
$$\operatorname{Im} f \underset{\text{déf.}}{=} f(G) = \{f(x) \,;\, x \in G\}$$

Exercice 5

Montrer que :

a) $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G

b) $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de G'

3 Morphismes de groupes

Définition 4

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- Le *noyau* de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est l'ensemble des antécédents de e' par f : $\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid f(x) = e'\}$
- L'*image* de f, notée $\operatorname{Im} f$, est l'ensemble :
$$\operatorname{Im} f \underset{\text{déf.}}{=} f(G) = \{f(x) \; ; \; x \in G\}$$

Exemple 5

L'application $f : z \mapsto e^z$ est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Déterminer son noyau.

3 Morphismes de groupes

Théorème 2

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- f est injectif ssi :

3 Morphismes de groupes

Théorème 2

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- f est injectif ssi : $\operatorname{Ker} f = \{e\}$

Théorème 2

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- f est injectif ssi : $\mathrm{Ker}\, f = \{e\}$
- f est surjectif ssi :

3 Morphismes de groupes

Théorème 2

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- f est injectif ssi : $\operatorname{Ker} f = \{e\}$
- f est surjectif ssi : $\operatorname{Im} f = G'$

3 Morphismes de groupes

Théorème 2

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- f est injectif ssi : $\operatorname{Ker} f = \{e\}$
- f est surjectif ssi : $\operatorname{Im} f = G'$

Exercice 6

Démontrer la première équivalence.

3 Morphismes de groupes

Théorème 2

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- f est injectif ssi : $\operatorname{Ker} f = \{e\}$
- f est surjectif ssi : $\operatorname{Im} f = G'$

Exemple 6

Montrer que l'application $\varphi : g \mapsto \gamma_g$ est un morphisme de groupe injectif de G dans $S(G)$.

3 Morphismes de groupes

Théorème 2

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

- f est injectif ssi : $\operatorname{Ker} f = \{e\}$
- f est surjectif ssi : $\operatorname{Im} f = G'$

Exemple 7

1. Montrer que les morphismes de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{U}_n$ sont les applications $z \mapsto z^p$ pour $p \in [\![0\,,n-1]\!]$
2. Soit $p \in [\![0\,,n-1]\!]$. Montrer que $f : z \mapsto z^p$ est un isomorphisme si et seulement si $p \wedge n = 1$.

III Anneaux

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif,

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$ ▪ est associative ▪

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$
- est associative
- possède un élément neutre noté 1_A

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$
- est associative
- possède un élément neutre noté 1_A

iii) $\times$ est distributive sur $+$

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$
- est associative
- possède un élément neutre noté 1_A

iii) $\times$ est distributive sur $+$ *i.e.* $\begin{cases} x \times (y+z) = x \times y + x \times z \\ (y+z) \times x = y \times x + z \times x \end{cases}$ pour tous $x, y, z \in A$

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$
- est associative
- possède un élément neutre noté 1_A

iii) $\times$ est distributive sur $+$ *i.e.* $\begin{cases} x \times (y+z) = x \times y + x \times z \\ (y+z) \times x = y \times x + z \times x \end{cases}$
pour tous $x, y, z \in A$

Exemple 1 : Exemples d'anneaux commutatifs

$(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$
- est associative
- possède un élément neutre noté 1_A

iii) $\times$ est distributive sur $+$ *i.e.* $\begin{cases} x \times (y+z) = x \times y + x \times z \\ (y+z) \times x = y \times x + z \times x \end{cases}$
pour tous $x, y, z \in A$

Définition 2

Un *corps* est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$ et dans lequel tout élément autre que 0 est inversible.

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A, +, \times)$ est un *anneau* si :

i) $(A, +)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$
- est associative
- possède un élément neutre noté 1_A

iii) $\times$ est distributive sur $+$ *i.e.* $\begin{cases} x \times (y+z) = x \times y + x \times z \\ (y+z) \times x = y \times x + z \times x \end{cases}$
pour tous $x, y, z \in A$

Définition 2

Un *corps* est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$ et dans lequel tout élément autre que 0 est inversible.

Exercice 1 : Sont-ils des corps ?

a) $(\mathbb{Z}, +, \times)$ b) $(\mathbb{Q}, +, \times)$ c) $(\mathbb{R}, +, \times)$ d) $(\mathbb{C}, +, \times)$

1 Généralités

Définition 1

Soit A un ensemble muni de deux lois de compositions internes $+$ et $\times$. On dit que $(A,+,\times)$ est un *anneau* si :

i) $(A,+)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre noté 0_A.

ii) La loi $\times$ ▪ est associative ▪ possède un élément neutre noté 1_A

iii) $\times$ est distributive sur $+$ *i.e.* $\begin{cases} x\times(y+z) = x\times y + x\times z \\ (y+z)\times x = y\times x + z\times x \end{cases}$ pour tous $x,y,z\in A$

Exercice 2

Soit $(A,+,\times)$ un anneau $a,b\in A$ et $n\in\mathbb{Z}$. Montrer que :

a) $a\times 0_A = 0_A$ b) $(-a)\times b = -(a\times b)$ c) $(na)\times b = n(a\times b)$

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1 Généralités

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.

1 Généralités

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Formule du binôme

1 Généralités

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Formule du binôme

Définition 3

On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

1 Généralités

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Formule du binôme

Définition 3

On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

Exemple 2

- $U(\mathbb{Z}) =$
-
-

1 Généralités

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a - b) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Formule du binôme

Définition 3

On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

Exemple 2

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
-
-

1 Généralités

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Formule du binôme

Définition 3

On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

Exemple 2

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) =$
-

1 Généralités

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$ Formule du binôme

Définition 3

On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

Exemple 2

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
-

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Formule du binôme

Définition 3

On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

Exemple 2

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est

1 Généralités

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a - b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Formule du binôme

Définition 3

On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

Exemple 2

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

Théorème 1 : Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et soient $a, b \in A$. $\boxed{\text{Si } a \times b = b \times a}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \times b^{n-1-k}$.
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$

Définition 3

On note $U(A)$ l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\times$.

☢ $(A, \times)$ n'est pas un groupe ☢

Exemple 2

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

2 Sous-anneaux

Exemple 2

☢ $(A, \times)$ n'est pas un groupe ☢

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

Définition 4

partie de A

$(A, +, \times)$ est un anneau

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

2 Sous-anneaux

Exemple 2

$(A, \times)$ n'est pas un groupe

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

Définition 4

partie de A

$(A, +, \times)$ est un anneau

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

Exemple 2

$(A, \times)$ n'est pas un groupe

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

Définition 4

partie de A

$(A, +, \times)$ est un anneau

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

2 Sous-anneaux

Exemple 2

☢ $(A, \times)$ n'est pas un groupe ☢

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

Définition 4

partie de A

$(A, +, \times)$ est un anneau

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$

☢ $(A, \times)$ n'est pas un groupe ☢

Exemple 2

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

partie de A

$(A, +, \times)$ est un anneau

Définition 4

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$ *i.e.* : $\forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

Exemple 2

⚠ $(A, \times)$ n'est pas un groupe ⚠

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

partie de A

$(A, +, \times)$ est un anneau

Définition 4

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$ *i.e.* : $\quad \forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

Exemple 3

$\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ lui-même sous-anneau de $\mathbb{R}$, lui-même sous-anneau de $\mathbb{C}$.

2 Sous-anneaux

Exemple 2

☢ $(A, \times)$ n'est pas un groupe ☢

- $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
- $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$
- $(U(A), \times)$ est un groupe

$(A, +, \times)$ est un anneau

Définition 4

partie de A

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$ *i.e.* : $\quad \forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

Exemple 4

L'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un anneau pour la multiplication et l'addition des fonctions. Dans cet anneau l'ensemble des fonctions dérivables est un sous-anneau.

3 Morphismes d'anneaux

Définition 5

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$ *i.e.* : $\quad \forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

Définition 6

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i)

3 Morphismes d'anneaux

Définition 5

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$ *i.e.* : $\quad \forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

Définition 6

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) $f(1_A) = 1_B$

3 Morphismes d'anneaux

Définition 5

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$ *i.e.* : $\quad \forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

Définition 6

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) $f(1_A) = 1_B$

ii) $\forall x, y \in A, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$

Définition 5

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$ *i.e.* : $\quad \forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

$(A, +, \cdot)$ est un anneau

Définition 6

$(B, +, \times)$ est un anneau

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) $f(1_A) = 1_B$

ii) $\forall x, y \in A, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$

3 Morphismes d'anneaux

Définition 5

On dit que B est un *sous-anneau* de A si :

i) $1_A \in B$

ii) B est un sous-groupe de $(A, +)$.

iii) B stable par $\times$ *i.e.* : $\quad \forall x, y \in B, \quad x \times y \in B$

$(A, +, \cdot)$
est un anneau

Définition 6

$(B, +, \times)$
est un anneau

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) $f(1_A) = 1_B$

ii) $\forall x, y \in A, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$

iii) $\forall x, y \in A, \quad f(x \cdot y) = f(x) \times f(y)$

3 Morphismes d'anneaux

$(A, +, \cdot)$ est un anneau

$(B, +, \times)$ est un anneau

Définition 5

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) $f(1_A) = 1_B$

ii) $\forall x, y \in A, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$

iii) $\forall x, y \in A, \quad f(x \cdot y) = f(x) \times f(y)$

Remarque

f est en particulier un morphisme de groupes entre $(A, +)$ et $(B, +)$

3 Morphismes d'anneaux

$(A, +, \cdot)$ est un anneau

$(B, +, \times)$ est un anneau

Définition 5

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) $f(1_A) = 1_B$

ii) $\forall x, y \in A, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$

iii) $\forall x, y \in A, \quad f(x \cdot y) = f(x) \times f(y)$

Retenir

Si f est un morphisme d'anneau : $\boxed{f \text{ est injectif ssi } \operatorname{Ker} f = \{0_A\}}$

3 Morphismes d'anneaux

$(A, +, \cdot)$ est un anneau

$(B, +, \times)$ est un anneau

Définition 5

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) $f(1_A) = 1_B$

ii) $\forall x, y \in A, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

iii) $\forall x, y \in A, \quad f(x \cdot y) = f(x) \times f(y)$

☢ $\operatorname{Ker} f = \{x \in A \mid f(x) = 0_B\}$ ☢

Retenir

Si f est un morphisme d'anneau : $\boxed{f \text{ est injectif ssi } \operatorname{Ker} f = \{0_A\}}$

3 Morphismes d'anneaux

$(A, +, \cdot)$ est un anneau

$(B, +, \times)$ est un anneau

Définition 5

Une application $f : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* si :

i) $f(1_A) = 1_B$

ii) $\forall x, y \in A, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

iii) $\forall x, y \in A, \quad f(x \cdot y) = f(x) \times f(y)$

Exemple 5

Trouver tous les morphismes de corps f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f(x) = x$

4 Anneaux intègres

Définition 6

Un anneau commutatif non nul $(A, +, \times)$ est *intègre* si pour tous $x, y \in A$:

4 Anneaux intègres

Définition 6

Un anneau commutatif non nul $(A, +, \times)$ est *intègre* si pour tous $x, y \in A$: $\quad x \times y = 0_A \implies x = 0_A \quad \text{ou} \quad y = 0_A$

4 Anneaux intègres

Définition 6

Un anneau commutatif non nul $(A, +, \times)$ est *intègre* si pour tous $x, y \in A$: $\quad x \times y = 0_A \implies x = 0_A \quad \text{ou} \quad y = 0_A$

Remarque

Dans un anneau intègre si $x \neq 0_A$, l'égalité : $\quad x \times y = x \times z$ impose : $\quad y = z$

4 Anneaux intègres

Définition 6

Un anneau commutatif non nul $(A, +, \times)$ est *intègre* si pour tous $x, y \in A$: $\quad x \times y = 0_A \implies x = 0_A \quad \text{ou} \quad y = 0_A$

Exemple 6

- $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre
- Tout corps est un anneau intègre.

4 Anneaux intègres

Définition 6

Un anneau commutatif non nul $(A, +, \times)$ est *intègre* si pour tous $x, y \in A$: $\quad x \times y = 0_A \implies x = 0_A \quad \text{ou} \quad y = 0_A$

Exercice 3

Montrer que l'anneau $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas intègre.