Accroissements finis

Chapitre 14.1

I Rolle et égalité des accroissements finis

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,, b]$.

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a, b]$.

ii) f est dérivable sur $]a, b[$.

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,, b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,, b[$.

iii) $f(a) = f(b)$.

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,, b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,, b[$.

iii) $f(a) = f(b)$.

Alors : il existe $c \in\,]a\,, b[$ tel que $\quad f'(c) = 0$.

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

iii) $f(a) = f(b)$.

Alors : il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $\quad f'(c) = 0$.

Exercice 1

Démontrer ce théorème en commençant par représenter graphiquement la situation.

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

iii) $f(a) = f(b)$.

Alors : il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $\quad f'(c) = 0$.

SF 7 : utiliser le théorème de Rolle

Exemple 1

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in\,]0\,,1[$ tel que :

$$4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x = \alpha + \beta + \gamma.$$

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

iii) $f(a) = f(b)$.

Alors : il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $\quad f'(c) = 0$.

SF 6 : utiliser le théorème de Rolle

Exemple 2

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable.
On suppose que : $\quad f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$.
Montrer que f''' s'annule

1 Théorème de Rolle

Théorème 1

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

iii) $f(a) = f(b)$.

Alors : il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $\quad f'(c) = 0$.

SF 6 : utiliser le théorème de Rolle

Exemple 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \geq 1)$.
On suppose que f s'annule en au moins $n+1$ points distincts.
Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

2 Egalité des accroissements finis

Théorème 2

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

2 Egalité des accroissements finis

Théorème 2

Soit $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,, b]$.

2 Egalité des accroissements finis

Théorème 2

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

2 Egalité des accroissements finis

Théorème 2

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

Alors : il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

2 Egalité des accroissements finis

Théorème 2

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

Alors : il existe $c \in \,]a\,,b[$ tel que $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Graphiquement

2 Egalité des accroissements finis

Théorème 2

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a, b]$.

ii) f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors : il existe $c \in]a, b[$ tel que $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Graphiquement

Il existe un point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à (AB).

2 Egalité des accroissements finis

Théorème 2

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

Alors : il existe $c \in \,]a\,,b[$ tel que $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Graphiquement

Il existe un point de $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à (AB).

Exercice 2 : Ex. 3.1 et 3.2, banque INP

1. Démontrer le théorème de l'égalité des accroissements finis.
2. En utilisant l'égalité des accroissements finis, démontrer le théorème de la limite de la dérivée.

2 Egalité des accroissements finis

Théorème 2

Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :

i) f est continue sur $[a\,,b]$.

ii) f est dérivable sur $]a\,,b[$.

Alors : il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Exemple 4 : La suite harmonique diverge (Preuve n° 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$

b) En déduire : $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Exercice 3 : Inégalité des accroissements finis

On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur I.

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Exercice 4

Démontrer que f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I.

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Exercice 5

Démontrer que f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Théorème 3

f est strictement croissante sur I si et seulement si :

- $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Théorème 3

f est strictement croissante sur I si et seulement si :

- $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$
- f' n'est nulle sur aucun intervalle $[a\,,b]$ avec $a < b$.

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Théorème 3

f est strictement croissante sur I si et seulement si :

- $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$
- f' n'est nulle sur aucun intervalle $[a\,, b]$ avec $a < b$.

Remarque

Le théorème s'applique en particulier si :

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Théorème 3

f est strictement croissante sur I si et seulement si :

- $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$
- f' n'est nulle sur aucun intervalle $[a\,,b]$ avec $a < b$.

Remarque

Le théorème s'applique en particulier si :

- f' ne s'annule pas

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Théorème 3

f est strictement croissante sur I si et seulement si :

- $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$
- f' n'est nulle sur aucun intervalle $[a\,, b]$ avec $a < b$.

Remarque

Le théorème s'applique en particulier si :

- f' ne s'annule pas
- f' s'annule un nombre fini de fois

3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

Cadre

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Théorème 3

f est strictement croissante sur I si et seulement si :

- $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$
- f' n'est nulle sur aucun intervalle $[a\,,b]$ avec $a < b$.

Remarque

Le théorème s'applique en particulier si :

- f' ne s'annule pas
- f' s'annule un nombre fini de fois

Exemple 5

Justifier la stricte monotonie sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

a) $f : x \mapsto \operatorname{th} x - x$ b) $g : x \mapsto x + \cos x$

II Limite, continuité, dérivabilité : extension aux fonctions complexes

Pas de théorème de Rolle ni d'égalité des accroissements finis ...

Exemple 1 : Contre-exemple au théorème de Rolle

On considère la fonction $f : t \mapsto e^{it}$ définie sur $[0\,,2\pi]$.
La fonction f satisfait aux trois hypothèses du théorème de Rolle mais ne vérifie pas sa conclusion.

… mais encore l'inégalité des accroissements finis

Théorème 1

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe un réel k tel que $|f'| \leq k$ sur I.
Alors la fonction f est k-lipschitzienne sur I.

Exercice 1

Montrer le théorème à l'aide de « la ruse de la partie réelle »