Dérivabilité

Chapitre 14.0

Cadre

- I est un intervalle non vide et non réduit à un point
- $a \in I$
- $f : I \to \mathbb{R}$

I Dérivée en un point

1 Définition

Définition 1

La fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a,

1 Définition

Définition 1

La fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie en a.

1 Définition

Définition 1

La fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie en a.

En ce cas on pose : $\quad f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

1 Définition

Définition 1

La fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie en a.

En ce cas on pose : $\quad f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Exemple 1 : Etudier la dérivabilité en 0 ▸ Figure

$$f : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1 Définition

Définition 1

La fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie en a.

En ce cas on pose : $\quad f'(a) = \displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Exercice 1

Montrer que f est dérivable en a ssi il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \ell(x - a) + \varepsilon(x)(x - a)$$

où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifie : $\quad \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$

1 Définition

Vocabulaire

f est *dérivable à droite en a* si $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie à droite en a. On note alors : $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

1 Définition

Vocabulaire

f est *dérivable à droite en a* si $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie à droite en a. On note alors : $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Théorème 1

Supposons que a est un point intérieur à I. f est dérivable en a ssi :

1 Définition

Vocabulaire

f est *dérivable à droite en a* si $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie à droite en a. On note alors : $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Théorème 1

Supposons que a est un point intérieur à I. f est dérivable en a ssi :
f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

1 Définition

Vocabulaire

f est *dérivable à droite en a* si $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie à droite en a. On note alors : $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Théorème 1

Supposons que a est un point intérieur à I. f est dérivable en a ssi :
f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple 2

Montrer que la fonction $f : x \mapsto |\mathrm{Arctan}\, x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

1 Définition

Vocabulaire

f est *dérivable à droite en a* si $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite finie à droite en a. On note alors : $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Théorème 1

Supposons que a est un point intérieur à I. f est dérivable en a ssi :
f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple 3

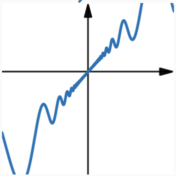
On suppose que f est convexe et que a est un point intérieur à I. Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en a.

DÉRIVABILITÉ

$\Downarrow$

CONTINUITÉ

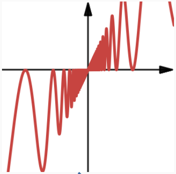
2 Dérivabilité et continuité



DÉRIVABILITÉ

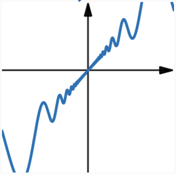
$\Downarrow$

CONTINUITÉ



2 Dérivabilité et continuité

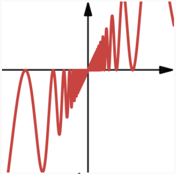
Graphe « lisse »



DÉRIVABILITÉ

$\Downarrow$

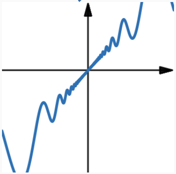
CONTINUITÉ



Graphe « sans trou »

2 Dérivabilité et continuité

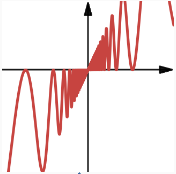
Graphe « lisse »
au voisinage de a :
« $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ »



DÉRIVABILITÉ

$\Downarrow$

CONTINUITÉ



Graphe « sans trou »
au voisinage de a :
« $f(x) \approx f(a)$ »

2 Dérivabilité et continuité

Remarque

Si f est dérivable en a pour $x \in I$:

2 Dérivabilité et continuité

Remarque

Si f est dérivable en a pour $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0}$$

2 Dérivabilité et continuité

Remarque

Si f est dérivable en a pour $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0}$$

Théorème 2

Si f est dérivable en a, alors :

2 Dérivabilité et continuité

Remarque

Si f est dérivable en a pour $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0}$$

Théorème 2

Si f est dérivable en a, alors : f est continue en a.

2 Dérivabilité et continuité

Remarque

Si f est dérivable en a pour $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0}$$

Théorème 2

Si f est dérivable en a, alors : f est continue en a.

Exercice 2

Démontrer ce théorème.

2 Dérivabilité et continuité

Remarque

Si f est dérivable en a pour $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0}$$

Théorème 2

Si f est dérivable en a, alors : f est continue en a.

☢ **Attention** ☢ La réciproque est fausse, par exemple :

2 Dérivabilité et continuité

Remarque

Si f est dérivable en a pour $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \qquad \text{où} \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0}$$

Théorème 2

Si f est dérivable en a, alors : f est continue en a.

☢ **Attention** ☢ La réciproque est fausse, par exemple : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si :

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]a-\alpha\,, a+\alpha\right[\cap I,\ f(x) \leq f(a)$$

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]a-\alpha\,, a+\alpha\right[\cap I,\ f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que ▪ a est un point intérieur à I ▪ f est dérivable en a

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]a - \alpha, a + \alpha\right[\cap I,\ f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que ▪ a est un point intérieur à I ▪ f est dérivable en a
Si f possède un extremum local en a alors : $f'(a) = 0$

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \,]a-\alpha\,, a+\alpha[\cap I, \; f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que ▪ a est un point intérieur à I ▪ f est dérivable en a
$\boxed{\text{Si}}$ f possède un extremum local en a $\boxed{\text{alors}}$: $f'(a) = 0$

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]a - \alpha\,, a + \alpha\right[\cap I,\ f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que
- a est un point intérieur à I
- f est dérivable en a

Si f possède un extremum local en a alors : $f'(a) = 0$

a est un point critique de f

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]a - \alpha, a + \alpha\right[\cap I, \ f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que ▪ a est un point intérieur à I ▪ f est dérivable en a
$\boxed{\text{Si}}$ f possède un extremum local en a $\boxed{\text{alors}}$: $f'(a) = 0$

a est un point critique de f

Exemple 4 : ☢ **Attention** ☢

Prouver que la réciproque du théorème précédent est fausse

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \,]a-\alpha\,, a+\alpha[\cap I, \; f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que ▪ a est un point intérieur à I ▪ f est dérivable en a
$\boxed{\text{Si}}$ f possède un extremum local en a $\boxed{\text{alors}}$: $f'(a) = 0$

a est un point critique de f

Exercice 3

Démontrer ce théorème dans le cas d'un maximum local.

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]a - \alpha\,, a + \alpha\right[\cap I,\ f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que ▪ a est un point intérieur à I ▪ f est dérivable en a

Si f possède un extremum local en a alors : $f'(a) = 0$

a est un point critique de f

Exemple 5 : Bonus : vrai ou faux ?

Si f possède un minimum en a alors f est décroissante à gauche de a et croissante à droite

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]a - \alpha\,, a + \alpha\right[\cap I,\ f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que ▪ a est un point intérieur à I ▪ f est dérivable en a

$\boxed{\text{Si}}$ f possède un extremum local en a $\boxed{\text{alors}}$: $f'(a) = 0$

a est un point critique de f

Exemple 5 : Bonus : vrai ?

Si f possède un minimum en a alors f est décroissante à gauche de a et croissante à droite au voisinage de a

3 Extremum local

Définition 2

f possède un maximum local en a si : au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$
i.e. s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]a-\alpha\,, a+\alpha\right[\cap I,\ f(x) \leq f(a)$$

Théorème 3

On suppose que ▪ a est un point intérieur à I ▪ f est dérivable en a
$\boxed{\text{Si}}$ f possède un extremum local en a $\boxed{\text{alors}}$: $f'(a) = 0$

a est un point critique de f

Exemple 5 : Faux

Si f possède un minimum en a alors f est décroissante à gauche de a et croissante à droite au voisinage de a ▸ Figure

II Justifier la dérivabilité

1 Opérations sur les dérivées

Théorème 1 : Opérations algébriques

Soient u, v deux fonction dérivables en a et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $\lambda u + \mu v$ est dérivable en a et $(\lambda u + \mu v)'(a) = \lambda u'(a) + \mu v'(a)$
- uv est dérivable en a et :

$$(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

- Si $v(a) \neq 0$, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en a et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$$

Exercice 1

Etablir la formule pour le produit.

1 Opérations sur les dérivées

Cadre

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & J \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \\ a \arrow[r, mapsto] & u(a) & v\big(u(a)\big) \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : Composition

Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

1 Opérations sur les dérivées

Cadre

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & J \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \\
a \arrow[r, mapsto] & u(a) & v\big(u(a)\big)
\end{tikzcd}
$$

Théorème 2 : Composition

Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'\big(u(a)\big)$$

1 Opérations sur les dérivées

Cadre

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & J \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \\ a \arrow[r, mapsto] & u(a) \arrow[r, mapsto] & v\big(u(a)\big) \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : Composition

Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'\big(u(a)\big)$$

Exercice 2

Démontrer la formule précédente.

1 Opérations sur les dérivées

Cadre

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & J \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \\ a \arrow[r, mapsto] & u(a) \arrow[r, mapsto] & v\big(u(a)\big) \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : Composition

Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'\big(u(a)\big)$$

Exemple 1

Justifier la dérivabilité de : a) $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)\ln x}$ sur $[1\,,+\infty[$

1 Opérations sur les dérivées

Cadre

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & J \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \\ a \arrow[r, mapsto] & u(a) \arrow[r, mapsto] & v\big(u(a)\big) \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : Composition

Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'\big(u(a)\big)$$

Exemple 1

Justifier la dérivabilité de : b) $f : x \mapsto \text{Arcsin}(1 - x^2)$ sur $[0\,, \sqrt{2}[$

2 Dérivation des fonctions réciproques

- **Cadre.** f est continue sur $\boldsymbol{I}$ et strictement monotone
- **Rappel.**

2 Dérivation des fonctions réciproques

- **Cadre.** f est continue sur I et strictement monotone
- **Rappel.** f est bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue sur $f(I)$

2 Dérivation des fonctions réciproques

- **Cadre.** f est continue sur I et strictement monotone
- **Rappel.** f est bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue sur $f(I)$

Théorème 3

On pose : $b = f(a)$.

On suppose que f est dérivable en a et que

Alors f^{-1} est dérivable en b et :

2 Dérivation des fonctions réciproques

- **Cadre.** f est continue sur I et strictement monotone
- **Rappel.** f est bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue sur $f(I)$

Théorème 3

On pose : $b = f(a)$.

On suppose que f est dérivable en a $\boxed{\text{et que } f'(a) \neq 0}$

Alors f^{-1} est dérivable en b et :

2 Dérivation des fonctions réciproques

- **Cadre.** f est continue sur I et strictement monotone
- **Rappel.** f est bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue sur $f(I)$

Théorème 3

On pose : $b = f(a)$.

On suppose que f est dérivable en a $\boxed{\text{et que } f'(a) \neq 0}$

Alors f^{-1} est dérivable en b et : $\boxed{(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$

2 Dérivation des fonctions réciproques

- **Cadre.** f est continue sur I et strictement monotone
- **Rappel.** f est bijective de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue sur $f(I)$

Théorème 3

On pose : $b = f(a)$.

On suppose que f est dérivable en a $\boxed{\text{et que } f'(a) \neq 0}$

Alors f^{-1} est dérivable en b et : $\boxed{(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$

$= \dfrac{1}{f'(a)}$

2 Dérivation des fonctions réciproques

Théorème 3

On pose : $b = f(a)$.

On suppose que f est dérivable en a $\boxed{\text{et que } f'(a) \neq 0}$

Alors f^{-1} est dérivable en b et : $\boxed{(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$

$= \dfrac{1}{f'(a)}$

Exercice 3

Démontrer la formule précédente.

2 Dérivation des fonctions réciproques

Théorème 3

On pose : $b = f(a)$.

On suppose que f est dérivable en a $\boxed{\text{et que } f'(a) \neq 0}$

Alors f^{-1} est dérivable en b et : $\boxed{(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$

Rappel

Ce théorème justifie la dérivabilité de Arccos et Arcsin sur $]-1\,,1[$ et la dérivabilité de Arctan sur $\mathbb{R}$.

2 Dérivation des fonctions réciproques

Théorème 3

On pose : $b = f(a)$.

On suppose que f est dérivable en a $\boxed{\text{et que } f'(a) \neq 0}$

Alors f^{-1} est dérivable en b et : $\boxed{(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$

☢ Attention ☢

- Arccos et Arcsin ne sont pas dérivables en -1 et 1.
- Plus généralement, si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b.

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a\,, b[$
- f est dérivable sur $]a\,, b[$

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a\,, b[$
- f est dérivable sur $]a\,, b[$

Si : $f'(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

3 Théorème de la limite de la dérivée

Même conclusion en b si :

- f est continue sur $]a\,,b]$
- f est dérivable sur $]a\,,b[$
- $f'(x) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \ell$

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a\,,b[$
- f est dérivable sur $]a\,,b[$

Si : $f'(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a\,, b[$
- f est dérivable sur $]a\,, b[$

Si : $f'(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$

En un point a intérieur :

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$
- $f'(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\longrightarrow} \ell$

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a, b[$
- f est dérivable sur $]a, b[$

Si : $f'(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Conséquence

Lorsque ℓ est finie :

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a\,,b[$
- f est dérivable sur $]a\,,b[$

Si : $f'(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Conséquence

Lorsque ℓ est finie : $\boxed{f \text{ est dérivable en } a}$

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a\,, b[$
- f est dérivable sur $]a\,, b[$

Si : $f'(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Conséquence

Lorsque ℓ est finie : $\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f' \text{ est continue en } a}$

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a\,,b[$
- f est dérivable sur $]a\,,b[$

Si : $f'(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Conséquence

Lorsque ℓ est finie : $\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f' \text{ est continue en } a}$

Exemple 2 : Etudier la dérivabilité en 0 de f

f est la fonction $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(1 - x^2)$ définie sur $[0\,,\sqrt{2}]$.

3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 4 : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que :

- f est continue sur $[a\,,b[$
- f est dérivable sur $]a\,,b[$

Si : $f'(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$

Exercice 4 : Ex. 4.3, banque INP

Montrer que l'implication :

$(f \text{ est dérivable en } a) \Longrightarrow (f' \text{ admet une limite finie en } a)$

est fausse.

III Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

1 Définition

Notation

- Pour $n = 0$: $f^{(0)} = f$
- Pour $n \in \mathbb{N}$:

1 Définition

Notation

- Pour $n = 0$: $\quad f^{(0)} = f$
- Pour $n \in \mathbb{N}$: si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est dérivable :
$$f^{(n+1)} \underset{\text{déf.}}{=} \left(f^{(n)}\right)'$$

1 Définition

Notation

- Pour $n = 0$: $f^{(0)} = f$
- Pour $n \in \mathbb{N}$: si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est dérivable :
  $$f^{(n+1)} \underset{\text{déf.}}{=} \left(f^{(n)}\right)'$$

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

1 Définition

Notation

- Pour $n = 0$: $\quad f^{(0)} = f$
- Pour $n \in \mathbb{N}$: si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est dérivable :
$$f^{(n+1)} \underset{\text{déf.}}{=} \left(f^{(n)}\right)'$$

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I

Notation

- Pour $n = 0$: $f^{(0)} = f$
- Pour $n \in \mathbb{N}$: si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est dérivable :
$$f^{(n+1)} \underset{\text{déf.}}{=} \left(f^{(n)}\right)'$$

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$:

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$:

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.
2. Si f est deux fois dérivable sur I :

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.
2. Si f est deux fois dérivable sur I : f est de classe $\mathcal{C}^1$

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.

f' est continue car dérivable

2. Si f est deux fois dérivable sur I : f est de classe $\mathcal{C}^1$

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

f' est continue
car dérivable

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.
2. Si f est deux fois dérivable sur I : f est de classe $\mathcal{C}^1$
3. f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si :

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

f' est continue car dérivable

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.
2. Si f est deux fois dérivable sur I : f est de classe $\mathcal{C}^1$
3. f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si : f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

équivaut à :
f est indéfiniment dérivable

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.
2. Si f est deux fois dérivable sur I : f est de classe $\mathcal{C}^1$
3. f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si : f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.
2. Si f est deux fois dérivable sur I : f est de classe $\mathcal{C}^1$
3. f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si : f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n

équivaut à :
f est indéfiniment dérivable

Exercice 1 : Calculer les dérivées k-ième de

a) $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ b) sh et ch c) sin et cos d) $f : x \mapsto x^p$

1 Définition

Définition 1

f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si :

- f est n fois dérivable sur I
- la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque

1. - f est $\mathcal{C}^0$: f est continue.
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$: f est dérivable et f' est continue.
2. Si f est deux fois dérivable sur I : f est de classe $\mathcal{C}^1$
3. f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si : f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n

Exercice 2

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k^{e} de $v : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 1 : Opérations algébriques version $\mathcal{C}^n$

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- *Combinaisons linéaires :*
  $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $\quad (\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 1 : Opérations algébriques version $\mathcal{C}^n$

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- *Combinaisons linéaires :*
  $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- *Produit.*

  fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 1 : Opérations algébriques version $\mathcal{C}^n$

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- *Combinaisons linéaires :*
  $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $\quad (\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- *Produit.*

  fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 1 : Opérations algébriques version $\mathcal{C}^n$

Formule de Leibniz

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- *Combinaisons linéaires :*
  $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- *Produit.*

  fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 1 : Opérations algébriques version $\mathcal{C}^n$

Formule de Leibniz

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- *Combinaisons linéaires :*
  $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- *Produit.*

  fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$
- *Quotient.* Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 1 : Opérations algébriques version $\mathcal{C}^n$

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- *Combinaisons linéaires :*
  $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- *Produit.*

  Formule de Leibniz

  fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$
- *Quotient.* Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Exercice 3 : Ex. 3, banque INP

1. Démontrer la formule de Leibniz.
2. Calculer la dérivée n^{e} de $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 1 : Opérations algébriques version $\mathcal{C}^n$

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- *Combinaisons linéaires :*
  $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- *Produit.*

  fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et : $\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$

  Formule de Leibniz
- *Quotient.* Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Exercice 3 : Ex. 3, banque INP

1. Démontrer la formule de Leibniz.
2. Calculer la dérivée n^{e} de $f : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$v^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 2 : Composition version $\mathcal{C}^n$

Si : i) v est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J

ii) u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, à valeurs dans J

alors $v \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 2 : Composition version $\mathcal{C}^n$

Si : i) v est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J

ii) u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, à valeurs dans J

alors $v \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

théorème analogue à « $v \circ u$ dérivable »

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 2 : Composition version $\mathcal{C}^n$

théorème analogue à « $v \circ u$ dérivable »

Si : i) v est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J

ii) u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, à valeurs dans J

alors $v \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

Théorème 3 : Réciproque version $\mathcal{C}^n$

Si : i) f est bijective de I sur J

ii) f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

iii)

alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 2 : Composition version $\mathcal{C}^n$

théorème analogue à « $v \circ u$ dérivable »

Si : i) v est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J

ii) u est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, à valeurs dans J

alors $v \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

Théorème 3 : Réciproque version $\mathcal{C}^n$

Si : i) f est bijective de I sur J

ii) f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

iii) $\boxed{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$

alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Théorème 2 : Réciproque version $\mathcal{C}^n$

Si : i) f est bijective de I sur J

ii) f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

iii) $\boxed{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$

alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Exemple 1

1. Justifier que $f : x \mapsto xe^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1\,,+\infty[$
2. Justifier que f est une bijection de $[-1\,,+\infty[$ sur $[-\frac{1}{e}\,,+\infty[$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{1}{e}\,,+\infty[$

SF 5 : Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Exemple 2

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que le prolongement par continuité de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

3 Variante $\mathcal{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée

① f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$:

- composition

SF 5 : Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Exemple 2

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que le prolongement par continuité de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

3 Variante $\mathcal{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée

① f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$:

- composition

② f est prolongeable par continuité en 0 :

SF 5 : Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Exemple 2

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que le prolongement par continuité de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

3 Variante $\mathcal{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée

SF 5 : Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

① f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$:

- composition

② f est prolongeable par continuité en 0 :

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Exemple 2

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que le prolongement par continuité de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

① f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$:

- composition

② f est prolongeable par continuité en 0 :

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

③ f est dérivable en 0 et f' y est continue

SF 5 : Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Exemple 2

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que le prolongement par continuité de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

① f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,,+\infty[$:

- composition

② f est prolongeable par continuité en 0 :

- $\lim_{x\to 0} f(x)$

③ f est dérivable en 0 et f' y est continue

- théorème de la limite de la dérivée

SF 5 : Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Exemple 2

1. Montrer que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que le prolongement par continuité de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.