Continuité sur un intervalle

Chapitre 13.1

Cadre

- I est un intervalle

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction

Objectif

« f est continue sur I »

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction

Objectif

« f est continue sur I »

Savoir le justifier (question)

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction

Objectif

« f est continue sur I »

Savoir l'utiliser
(hypothèse)

Savoir le justifier
(question)

I Justifier la continuité de f sur l'intervalle I tout entier

Justifier la continuité sur un intervalle

Vocabulaire

f est dite continue sur I si :

Justifier la continuité sur un intervalle

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

$\forall a \in I, \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

Justifier la continuité sur un intervalle

$\forall a \in I, \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

Justifier la continuité sur un intervalle

$\forall a \in I, \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

1. Opérations sur les fonctions continues

Justifier la continuité sur un intervalle

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions usuelles

Justifier la continuité sur un intervalle

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions usuelles

Exemple 1

1. Justifier que $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\right)$ est continue sur $[0\,,1[$.
2. Que peut-on dire en 1 ?

Justifier la continuité sur un intervalle

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions usuelles

Exemple 2

Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$.

Justifier la continuité sur un intervalle

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions usuelles

① Continuité en 1 :

② Continuité sur $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$:

Exemple 2

Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$.

Justifier la continuité sur un intervalle

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions usuelles

① Continuité en 1 :

- $g(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} g(1)$

② Continuité sur $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$:

Exemple 2

Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$.

Justifier la continuité sur un intervalle

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions usuelles

① Continuité en 1 :
- $g(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} g(1)$

② Continuité sur $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$:
- par opérations

Exemple 2

Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x > 1. \end{cases}$.

Justifier la continuité sur un intervalle

$\forall a \in I, \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

Vocabulaire

f est dite continue sur I si : elle est continue en tout point de I.

En pratique : pour justifier la continuité sur I

1. Opérations sur les fonctions continues
2. Continuité des fonctions usuelles

Exercice 1

Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I.

II Trois grands théorèmes de continuité

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$:

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a\,, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a\,, b]$ tel que $f(x) = y$.

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a\,, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a\,, b]$ tel que $f(x) = y$.

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a\,, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a\,, b]$ tel que $f(x) = y$.

Reformulation

Le TVI affirme que $f(I)$ est :

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a\,, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a\,, b]$ tel que $f(x) = y$.

Reformulation

Le TVI affirme que $f(I)$ est : un intervalle .

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a\,,b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a\,,b]$ tel que $f(x) = y$.

Reformulation

Le TVI affirme que $f(I)$ est : un intervalle .

Pour tous $u, v \in f(I)$ tels que $u < v$: $[u\,,v] \subset f(I)$

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a\,,b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a\,,b]$ tel que $f(x) = y$.

Reformulation

Le TVI affirme que $f(I)$ est : un intervalle .

Pour tous $u, v \in f(I)$ tels que $u < v$: $[u\,,v] \subset f(I)$

Exercice 1 : Figure

On suppose par exemple que $f(a) \leq f(b)$. Démontrer le TVI par dichotomie.

1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a\,,b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a\,,b]$ tel que $f(x) = y$.

Reformulation

Le TVI affirme que $f(I)$ est : un intervalle .

Exemple 1

Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$ et à valeurs dans $[0\,,1]$. Montrer que f possède un point fixe.

Théorème 1

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a\,, b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a\,, b]$ tel que $f(x) = y$.

Reformulation

Le TVI affirme que $f(I)$ est : un intervalle .

Exemple 2

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.

Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si :

Alors :

Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,, b[\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

Alors :

Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,, b[\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

ii) f est strictement croissante sur I

Alors :

Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,,b[\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $\quad f(a) = \alpha \quad$ et $\quad f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors :

Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,, b[\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $\quad f(a) = \alpha \quad$ et $\quad f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors : f est bijective de $[a\,, b[$ sur $[\alpha\,, \ell[$.

Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,,b[\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $\quad f(a) = \alpha \quad$ et $\quad f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors : f est bijective de $[a\,,b[$ sur $[\alpha\,,\ell[$.

A adapter si f est décroissante
ou si $I =]a\,,b]$

Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,,b[\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $\quad f(a) = \alpha \quad$ et $\quad f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors : f est bijective de $[a\,,b[$ sur $[\alpha\,,\ell[$.

A adapter si f est décroissante
ou si $I =]a\,,b]$

Exercice 2

Démontrer le théorème dans le cas où ℓ est finie.

Théorème 2 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,,b[\quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $f(a) = \alpha$ et $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors : f est bijective de $[a\,,b[$ sur $[\alpha\,,\ell[$.

Exemple 3

Cf. feuille 9-bis

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^n \ln x = 1$ a une unique solution dans $[1\,,+\infty[$, notée x_n
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

2 Fonction continue sur un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$ alors :

2 Fonction continue sur un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,, b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit :

2 Fonction continue sur un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a\,,b]$

2 Fonction continue sur un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a, b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$

Reformulation

Le théorème affirme que $f\left([a, b]\right)$ est :

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a\,,b]$

Reformulation

Le théorème affirme que $f\left([a\,,b]\right)$ est : un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a, b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$

☢ $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$ ☢

Reformulation

Le théorème affirme que $f([a, b])$ est : un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a, b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$

$f([a, b]) = [m, M]$

Reformulation

Le théorème affirme que $f([a, b])$ est : un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a\,,b]$

$f([a\,,b]) = [m\,,M]$

Reformulation

Le théorème affirme que $f\left([a\,,b]\right)$ est : un segment

Exercice 3

Démontrer l'existence d'un maximum pour f dans le théorème précédent.

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a\,,b]$

$f([a\,,b]) = [m\,,M]$

Reformulation

Le théorème affirme que $f\left([a\,,b]\right)$ est : un segment

Exemple 4 : ☢ Attention ☢

Donner un exemple de fonction f continue sur $]a\,,b]$ mais qui n'est pas bornée.

2 Fonction continue sur un segment

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a\,,b]$

$f([a\,,b]) = [m\,,M]$

Reformulation

Le théorème affirme que $f\left([a\,,b]\right)$ est : un segment

Exemple 5

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x(\ln x)\sin(\frac{1}{x})$ est bornée sur $]0\,,1]$.

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes

- Si $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a\,,b]$ alors : f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit : f possède un minimum m et un maximum M sur $[a\,,b]$

$f([a\,,b]) = [m\,,M]$

Reformulation

Le théorème affirme que $f\left([a\,,b]\right)$ est : un segment

Exemple 6

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue, admettant une limite finie ℓ en $+\infty$

a) Montrer que f est bornée

b) Montrer que f n'atteint pas nécessairement ses bornes

3 Continuité d'une réciproque

Théorème 4 : (Admis)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et injective alors :

3 Continuité d'une réciproque

Théorème 4 : (Admis)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et injective alors : f est strictement monotone

3 Continuité d'une réciproque

Théorème 4 : (Admis ?)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et injective alors : f est strictement monotone

Bonus

Démontrer le théorème à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

3 Continuité d'une réciproque

Théorème 5 : Continuité des fonctions réciproques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I.
On sait que f est bijective de I sur $J = f(I)$.

3 Continuité d'une réciproque

Intervalle d'après le TVI

Théorème 5 : Continuité des fonctions réciproques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I.
On sait que f est bijective de I sur $J = f(I)$.

3 Continuité d'une réciproque

Intervalle d'après le TVI

Théorème 5 : Continuité des fonctions réciproques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I. On sait que f est bijective de I sur $J = f(I)$.

1. f^{-1} est strictement monotone sur J de même sens que f.

3 Continuité d'une réciproque

Intervalle d'après le TVI

Théorème 5 : Continuité des fonctions réciproques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I.
On sait que f est bijective de I sur $J = f(I)$.

1. f^{-1} est strictement monotone sur J de même sens que f.
2. f^{-1} est continue sur J.

3 Continuité d'une réciproque

Intervalle d'après le TVI

Théorème 5 : Continuité des fonctions réciproques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I. On sait que f est bijective de I sur $J = f(I)$.

1. f^{-1} est strictement monotone sur J de même sens que f.
2. f^{-1} est continue sur J.

Exercice 5

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, strictement croissante, telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que : $f^{-1}(y) \underset{y\to\ell}{\longrightarrow} +\infty$.