Limite d’une fonction

Chapitre 13.0

Cadre

- I : intervalle non vide et non réduit à un point

Cadre

- I : intervalle non vide et non réduit à un point
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$: point de I ou une de ses extrémités

Cadre

- I : intervalle non vide et non réduit à un point
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$: point de I ou une de ses extrémités
- $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$

Cadre

- I : intervalle non vide et non réduit à un point
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$: point de I ou une de ses extrémités
- $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$

$\mathscr{D}_f = I$ ou $I \setminus \{a\}$

I Définitions de la limite

1 Limite en un point a est fini

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

1 Limite en un point a est fini

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$\forall \varepsilon > 0,$

1 Limite en un point a est fini

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

1 Limite en un point a est fini

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \ | \qquad\qquad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

1 Limite en un point a est fini

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \ | \quad \forall x \in \ [a - \alpha \, , a + \alpha] \cap \mathscr{D}_f \ , \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

1 Limite en un point a est fini

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \mid \quad \forall x \in [a - \alpha, a + \alpha] \cap \mathscr{D}_f, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Interpretation

1 Limite en un point a est fini

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \ | \quad \forall x \in \ [a - \alpha\, , a + \alpha] \cap \mathscr{D}_f \ , \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Interpretation

Pour tout $\varepsilon > 0$,

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \mid \quad \forall x \in \underbrace{[a - \alpha \, , a + \alpha] \cap \mathscr{D}_f}_{\text{Voisinage de } a} \, , \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Interpretation

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a

Définition 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \mid \quad \forall x \in \underbrace{[a-\alpha\,, a+\alpha] \cap \mathscr{D}_f}_{\text{Voisinage de } a}, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Interpretation

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x) \in [\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$

Définition 2

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si :

1 Limite en un point a est fini

Définition 2

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R},$$

Définition 2

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \qquad\qquad f(x) \leq A$$

Définition 2

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0 \mid \quad \forall x \in \underbrace{[a-\alpha\,, a+\alpha] \cap \mathscr{D}_f}_{\text{Voisinage de } a}, \quad f(x) \leq A$$

1 Limite en un point a est fini

Définition 2

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0 \mid \quad \forall x \in \underbrace{[a-\alpha\,, a+\alpha] \cap \mathscr{D}_f}_{\text{Voisinage de } a}, \quad f(x) \leq A$$

Graphiquement

Définition 2

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0 \mid \quad \forall x \in \underbrace{[a-\alpha\,,a+\alpha] \cap \mathscr{D}_f}_{\text{Voisinage de } a}, \quad f(x) \leq A$$

Graphiquement

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale en a

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 3

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si :

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 3

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,$$

Définition 3

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad\qquad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 3

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R} \mid \qquad\qquad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Définition 3

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R} \mid \quad \forall x \in \underbrace{[A, +\infty[\cap \mathscr{D}_f}_{\text{Voisinage de } +\infty}, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 3

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R} \mid \quad \forall x \in \underbrace{[A, +\infty[\cap \mathscr{D}_f}_{\text{Voisinage de } +\infty}, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Graphiquement

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 4

f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si :

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 4

f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},$$

Définition 4

f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \qquad\qquad f(x) \geq A.$$

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 4

f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \qquad\qquad\qquad\qquad f(x) \geq A.$$

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 4

f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f \cap \left]-\infty\,, B\right], \quad f(x) \geq A.$$

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 4

f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f \cap \left]-\infty\,, B\right], \quad f(x) \geq A.$$

Exercice 1 : Définir avec des quantificateurs

a) f admet $+\infty$ pour limite en a

2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition 4

f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f \cap \left]-\infty\,, B\right], \quad f(x) \geq A.$$

Exercice 1 : Définir avec des quantificateurs

b) f admet ℓ pour limite en $-\infty$

Définition 4

f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f \cap \left]-\infty\,, B\right], \quad f(x) \geq A.$$

Exercice 1 : Définir avec des quantificateurs

c) f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors :

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.

   On note : ▪ ▪ ▪

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note :
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
   - $\lim\limits_{a} f = \ell$
   - $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note :
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
   - $\lim\limits_{a} f = \ell$
   - $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a :

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note :
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
   - $\lim\limits_{a} f = \ell$
   - $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a : f est bornée

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note :
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
   - $\lim\limits_{a} f = \ell$
   - $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a : f est bornée au voisinage de a

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note :
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
   - $\lim\limits_{a} f = \ell$
   - $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a : f est bornée au voisinage de a
3. Si f admet en a une limite $\ell > 0$:

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note : ▪ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ▪ $\lim\limits_{a} f = \ell$ ▪ $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a : f est bornée au voisinage de a
3. Si f admet en a une limite $\ell > 0$: $f(x) > 0$ au voisinage de a

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note : ▪ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ▪ $\lim\limits_{a} f = \ell$ ▪ $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a : f est bornée au voisinage de a
3. Si f admet en a une limite $\ell > 0$: $f(x) > 0$ au voisinage de a
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et g est bornée au voisinage de a :

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note :
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
   - $\lim\limits_{a} f = \ell$
   - $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a : f est bornée au voisinage de a
3. Si f admet en a une limite $\ell > 0$: $f(x) > 0$ au voisinage de a
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et g est bornée au voisinage de a : $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

Vocabulaire

On dit que f vérifie une propriété P :

- *Au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ si :

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note : ▪ $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ▪ $\lim_{a} f = \ell$ ▪ $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a : f est bornée au voisinage de a
3. Si f admet en a une limite $\ell > 0$: $f(x) > 0$ au voisinage de a
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et g est bornée au voisinage de a : $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

Vocabulaire

On dit que f vérifie une propriété P :

- *Au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ si :
  il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie P sur $\mathscr{D}_f \cap \,]a - \alpha\,, a + \alpha[$.

3 Premières propriétés

Théorème 1 : Premières propriétés

1. Si f admet en a une limite alors : elle est unique.
   On note : ▪ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ▪ $\lim\limits_{a} f = \ell$ ▪ $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si f admet une limite finie en a : f est bornée au voisinage de a
3. Si f admet en a une limite $\ell > 0$: $f(x) > 0$ au voisinage de a
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et g est bornée au voisinage de a : $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

Vocabulaire

On dit que f vérifie une propriété P :

- *Au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ si :
  il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie P sur $\mathscr{D}_f \cap]a - \alpha, a + \alpha[$.
- *Au voisinage de* $+\infty$, si :
  il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que P est vraie sur $\mathscr{D}_f \cap]A, +\infty[$.

3 Premières propriétés

Vocabulaire

On dit que f vérifie une propriété P :

- *Au voisinage de $a \in \mathbb{R}$* si :
  il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie P sur $\mathscr{D}_f \cap \,]a-\alpha\,,a+\alpha[$.
- *Au voisinage de* $+\infty$, si :
  il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que P est vraie sur $\mathscr{D}_f \cap \,]A\,,+\infty[$.

Exemple 1

a) Au voisinage de 0, cos est :

3 Premières propriétés

Vocabulaire

On dit que f vérifie une propriété P :

- *Au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ si :
  il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie P sur $\mathscr{D}_f \cap]a-\alpha\,, a+\alpha[$.
- *Au voisinage de* $+\infty$, si :
  il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que P est vraie sur $\mathscr{D}_f \cap]A\,, +\infty[$.

Exemple 1

a) Au voisinage de 0, cos est : positive

3 Premières propriétés

Vocabulaire

On dit que f vérifie une propriété P :

- *Au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ si :
  il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie P sur $\mathscr{D}_f \cap]a - \alpha\,, a + \alpha[$.
- *Au voisinage de* $+\infty$, si :
  il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que P est vraie sur $\mathscr{D}_f \cap]A\,, +\infty[$.

Exemple 1

a) Au voisinage de 0, cos est : positive

b) Au voisinage de $1/2$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est :

3 Premières propriétés

Vocabulaire

On dit que f vérifie une propriété P :

- *Au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ si :
  il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie P sur $\mathscr{D}_f \cap]a - \alpha, a + \alpha[$.
- *Au voisinage de* $+\infty$, si :
  il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que P est vraie sur $\mathscr{D}_f \cap]A, +\infty[$.

Exemple 1

a) Au voisinage de 0, cos est : positive

b) Au voisinage de $1/2$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est : nulle

3 Premières propriétés

Vocabulaire

On dit que f vérifie une propriété P :

- *Au voisinage de* $a \in \mathbb{R}$ si :
  il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie P sur $\mathscr{D}_f \cap]a - \alpha\,, a + \alpha[$.
- *Au voisinage de* $+\infty$, si :
  il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que P est vraie sur $\mathscr{D}_f \cap]A\,, +\infty[$.

Exemple 1

a) Au voisinage de 0, cos est : positive

b) Au voisinage de $1/2$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est : nulle

Exercice 2

Démontrer le théorème (dans le cas a et ℓ finis) en adaptant les preuves faites pour les suites.

II Continuité en un point

Cadre

« f est continue en a »

Cadre

« f est continue en a »

Savoir le justifier
(question)

Cadre

Savoir l'utiliser
(hypothèse)

« f est continue en a »

Savoir le justifier
(question)

1 Définition de la continuité

Cadre

- $a \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* f est définie en a.

Exemple 1 : Etudier la continuité de f en 0 ▸ Figure

a) $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ b) $f : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1 Définition de la continuité

Cadre

- $a \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* f est définie en a.

Définition 1

- f est *continue* en a si :

1 Définition de la continuité

Cadre

- $a \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* f est définie en a.

Définition 1

- f est *continue* en a si : $\quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$

1 Définition de la continuité

Cadre

- $a \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* f est définie en a.

Définition 1

- f est *continue* en a si : $\quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$
- f est continue à gauche (respectivement à droite) si :

1 Définition de la continuité

Cadre

- $a \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* f est définie en a.

Définition 1

- f est *continue* en a si : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$
- f est continue à gauche (respectivement à droite) si :
  $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$

Cadre

- $a \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* f est définie en a.

Définition 1

- f est *continue* en a si : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$
- f est continue à gauche (respectivement à droite) si : $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$ (resp. $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a)$)

Cadre

- $a \in \mathscr{D}_f$ *i.e.* f est définie en a.

Définition 1

- f est *continue* en a si : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$
- f est continue à gauche (respectivement à droite) si :
  $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$ (resp. $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a)$)

Exemple 1 : Etudier la continuité de f en 0 ▸ Figure

a) $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ b) $f : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Théorème 1

On suppose que a est un point intérieur à I.
f est continue en a ssi :

1 Définition de la continuité

i.e. pas une borne

Théorème 1

On suppose que a est un point intérieur à I.
f est continue en a ssi :

1 Définition de la continuité

i.e. pas une borne

Théorème 1

On suppose que a est un point intérieur à I.
f est continue en a ssi : f est continue à gauche et à droite en a

i.e. pas une borne

Théorème 1

On suppose que a est un point intérieur à I.
f est continue en a ssi : f est continue à gauche et à droite en a

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudier la continuité à gauche et à droite en n de la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

2 Prolongement par continuité

Cadre

- $\mathscr{D}_f = I \setminus \{a\}$ *i.e.* f n'est pas définie en a.

Définition 2

f est *prolongeable par continuité* en a si :

2 Prolongement par continuité

Cadre

- $\mathscr{D}_f = I \setminus \{a\}$ *i.e.* f n'est pas définie en a.

Définition 2

f est *prolongeable par continuité* en a si : f admet une limite finie ℓ en a

2 Prolongement par continuité

Cadre

- $\mathscr{D}_f = I \setminus \{a\}$ *i.e.* f n'est pas définie en a.

Définition 2

f est *prolongeable par continuité* en a si : f admet une limite finie ℓ en a

Vocabulaire. On note $\widetilde{f}$ la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

2 Prolongement par continuité

Cadre

- $\mathscr{D}_f = I \setminus \{a\}$ *i.e.* f n'est pas définie en a.

Définition 2

f est *prolongeable par continuité* en a si : f admet une limite finie ℓ en a

Vocabulaire. On note $\widetilde{f}$ la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

- Par construction $\widetilde{f}$ est :

2 Prolongement par continuité

Cadre

- $\mathscr{D}_f = I \setminus \{a\}$ *i.e.* f n'est pas définie en a.

Définition 2

f est *prolongeable par continuité* en a si : f admet une limite finie ℓ en a

Vocabulaire. On note $\widetilde{f}$ la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

- Par construction $\widetilde{f}$ est : continue en a

Cadre

- $\mathscr{D}_f = I \setminus \{a\}$ *i.e.* f n'est pas définie en a.

Définition 2

f est *prolongeable par continuité* en a si : f admet une limite finie ℓ en a

Vocabulaire. On note $\widetilde{f}$ la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

- Par construction $\widetilde{f}$ est : continue en a

Le prolongement par continuité de f en a

2 Prolongement par continuité

Définition 2

f est *prolongeable par continuité* en a si : f admet une limite finie ℓ en a

Vocabulaire. On note $\widetilde{f}$ la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

- Par construction $\widetilde{f}$ est : continue en a

Le prolongement par continuité de f en a

Exemple 3

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0

a) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ b) $f : x \mapsto x \ln x$.

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

suite d'éléments de I

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

suite d'éléments de I

Conséquence. Cela justifie le critère « $\ell = f(\ell)$ » pour une suite u vérifiant : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad$ où f est continue en ℓ.

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Conséquence. Cela justifie le critère « $\ell = f(\ell)$ » pour une suite u vérifiant : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad$ où f est continue en ℓ.

$u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Conséquence. Cela justifie le critère « $\ell = f(\ell)$ » pour une suite u vérifiant : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad$ où f est continue en ℓ.

$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Conséquence. Cela justifie le critère « $\ell = f(\ell)$ » pour une suite u vérifiant : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \ = \ f(u_n) \quad$ où f est continue en ℓ.

Exercice 1

1. Démontrer l'équivalence : *i)* $\iff$ *ii)*

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Conséquence. Cela justifie le critère « $\ell = f(\ell)$ » pour une suite u vérifiant : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad$ où f est continue en ℓ.

Exercice 1

2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\quad f(r) = g(r)$.
Montrer que $f = g$.

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$

SF 8 : Equations fonctionnelles et continuité en un point

Exemple 4 : Figure 1 Figure 2

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite u par $u_0 = x_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan} u_n$. Montrer que u converge et trouver sa limite.
2. Trouver toutes les fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 2 : Intervertion de limite « $f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$ »

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. Il y a équivalence entre :

i) f est continue en a

ii) Pour toute suite $u \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Exemple 5

Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

sont les fonctions linéaires *i.e.* les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ où a décrit $\mathbb{R}$.

III Existence et/ou calcul de limites

1 Opérations algébriques sur les limites

Résultats analogues à ceux des suites pour les limites de

$$f+g, \quad f\times g, \quad \frac{f}{g}$$

Théorème 1 : Fonctions et suites

Pour a, ℓ finis ou non, il y a équivalence entre :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

2 Composition de limites

Théorème 1 : Fonctions et suites

Pour a, ℓ finis ou non, il y a équivalence entre :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

ii) Pour toute suite $u \in \mathscr{D}_f^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

Théorème 1 : Fonctions et suites

Pour a, ℓ finis ou non, il y a équivalence entre :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

ii) Pour toute suite $u \in \mathscr{D}_f^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

suite d'éléments de $\mathscr{D}_f$

2 Composition de limites

Théorème 1 : Fonctions et suites

Pour a, ℓ finis ou non, il y a équivalence entre :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

ii) Pour toute suite $u \in \mathscr{D}_f^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

suite d'éléments de $\mathscr{D}_f$

Exemple 1

Etudier les limites lorsque $n \to +\infty$ de :

a) $e^{\frac{1}{n!}}$

b) $\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n \qquad (a \in \mathbb{R}^*)$.

2 Composition de limites

Théorème 1 : Fonctions et suites

Pour a, ℓ finis ou non, il y a équivalence entre :

i) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

ii) Pour toute suite $u \in \mathscr{D}_f^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

SF 3 : Montrer que f n'admet pas de limite en a

On peut construire deux suites u, v telles que :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n)$

Exemple 2 :

Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$. Figure

2 Composition de limites

Théorème 1 : Fonctions et suites

Pour a, ℓ finis ou non, il y a équivalence entre :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

ii) Pour toute suite $u \in \mathscr{D}_f^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$

SF 3 : Montrer que f n'admet pas de limite en a

On peut construire deux suites u, v telles que :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n)$

Exemple 2 : Bonus – retour sur l'exemple 1b) de la partie II

Montrer que $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. ▸ Figure

2 Composition de limites

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Théorème 2 : Fonctions et fonctions

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose f à valeurs dans J.

2 Composition de limites

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : Fonctions et fonctions

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose f à valeurs dans J.
Si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$ alors : $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

2 Composition de limites

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ a \arrow[r, mapsto] & \boxed{\lim_a f} & \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : Fonctions et fonctions

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose f à valeurs dans J.

Si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$ alors : $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

2 Composition de limites

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ a \arrow[r, mapsto] & \boxed{b} \arrow[r, mapsto] & \boxed{\lim_{b} g} \end{tikzcd}$$

Théorème 2 : Fonctions et fonctions

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose f à valeurs dans J.
Si : $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{y \to b} g(y) = \ell$ alors : $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

Exercice 1

Démontrer ce théorème en utilisant les suites.

2 Composition de limites

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & b & \longmapsto & \ell \end{array} \qquad (g \circ f)$$

Théorème 2 : Fonctions et fonctions

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose f à valeurs dans J.
Si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$ alors : $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$

Exemple 3

Etudier les limites : a) $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x \times \ln(\ln x)$

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

ii)

3 Limites et inégalités larges

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$

ii)

3 Limites et inégalités larges

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$

ii)

$$f(x) \leq g(x)$$

3 Limites et inégalités larges

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$

ii) Au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$

3 Limites et inégalités larges

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$

ii) Au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$

Alors : $\ell_1 \leq \ell_2$

3 Limites et inégalités larges

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$

ii) Au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$

Alors : $\ell_1 \leq \ell_2$

Théorème 4 : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

3 Limites et inégalités larges

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$

ii) Au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$

Alors : $\ell_1 \leq \ell_2$

Théorème 4 : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

i) Au voisinage de a : $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

3 Limites et inégalités larges

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$

ii) Au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$

Alors : $\ell_1 \leq \ell_2$

Théorème 4 : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

i) Au voisinage de a : $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

ii) $\lim\limits_a f(x) = \lim\limits_a g = \ell$.

3 Limites et inégalités larges

Théorème 3 : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Si :

i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_2$

ii) Au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$

Alors : $\ell_1 \leq \ell_2$

Théorème 4 : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

i) Au voisinage de a : $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

ii) $\lim_a f(x) = \lim_a g = \ell$.

Alors : $h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 4 : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

i) Au voisinage de a : $\quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

ii) $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = \ell$.

Alors : $\quad h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 5 : majoration /minoration

On suppose qu'au voisinage de a : $\quad f(x) \leq g(x)$.

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 4 : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

i) Au voisinage de a : $\quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

ii) $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = \ell$.

Alors : $\quad h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 5 : majoration /minoration

On suppose qu'au voisinage de a : $\quad f(x) \leq g(x)$.

- Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ alors : $\quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 4 : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

i) Au voisinage de a : $\quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

ii) $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = \ell$.

Alors : $\quad h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 5 : majoration /minoration

On suppose qu'au voisinage de a : $\quad f(x) \leq g(x)$.

- Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ alors : $\quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ alors : $\quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 4 : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :

i) Au voisinage de a : $\quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

ii) $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = \ell$.

Alors : $\quad h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 5 : majoration /minoration

On suppose qu'au voisinage de a : $\quad f(x) \leq g(x)$.

- Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ alors : $\quad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ alors : $\quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemple 4

Existence et valeur de la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^x + \sin(x \ln x)$.

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-
- Sinon : $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-	**Limite en a^+**
- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^- - Sinon : $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$	

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-
- Sinon : $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$

Limite en a^+

- Si f est minorée, alors f a une limite finie en a^+
- Sinon : $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-
- Sinon : $\quad f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$

Limite en a^+

- Si f est minorée, alors f a une limite finie en a^+
- Sinon : $\quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-
- Sinon : $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$

Limite en a^+

- Si f est minorée, alors f a une limite finie en a^+
- Sinon : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$

Conséquence

En $c \in \,]a\,,b[$, f a des demi-limites finies et : $\lim\limits_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim\limits_{c^+} f$

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-
- Sinon : $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$

Limite en a^+

- Si f est minorée, alors f a une limite finie en a^+
- Sinon : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$

Conséquence

Le théorème s'applique à $g = f_{|]a\,,c[}$ ou $g = f_{|]c\,,b[}$

En $c \in\,]a\,,b[$, f a des demi-limites finies et : $\lim\limits_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim\limits_{c^+} f$

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-
- Sinon : $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$

Limite en a^+

- Si f est minorée, alors f a une limite finie en a^+
- Sinon : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$

Le théorème s'applique à $g = f_{|]a\,,c[}$ ou $g = f_{|]c\,,b[}$

Conséquence

En $c \in \,]a\,,b[$, f a des demi-limites finies et : $\lim\limits_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim\limits_{c^+} f$

Exemple 5

Montrer que si f convexe sur $]a\,,b[$ alors f est continue en $c \in \,]a\,,b[$

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-
- Sinon : $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$

Limite en a^+

- Si f est minorée, alors f a une limite finie en a^+
- Sinon : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$

Exemple 6

Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie en $+\infty$.

4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème 6 : Théorème de la limite monotone

On suppose que f est croissante sur $]a\,,b[$:

Limite en b^-

- Si f est majorée, alors f a une limite finie en b^-
- Sinon : $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$

Limite en a^+

- Si f est minorée, alors f a une limite finie en a^+
- Sinon : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$

Exercice 2 : Bonus

Montrer l'existence d'une limite finie en b^- dans le cas d'une fonction majorée.