Systèmes linéaires

Chapitre 8

Généralités

Système linéaire de n équations à p inconnues

$$
(S) \quad \begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\
\vdots & \\
a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i & (L_i) \\
\vdots & \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n)
\end{cases}
$$

Système linéaire de n équations à p inconnues

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i & (L_i) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les inconnues du système.

Système linéaire de n équations à p inconnues

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i & (L_i) \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- Les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système.
- $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les inconnues du système.

Système linéaire de n équations à p inconnues

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i & (L_i) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- Les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système.
- Les b_i forment le second membre du système.
- $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les inconnues du système.

Système linéaire de n équations à p inconnues

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i & (L_i) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- Les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système.
- Les b_i forment le second membre du système.
- $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les inconnues du système.
- La i^{e} équation, ou i^{e} ligne, du système est notée L_i.

Système linéaire de n équations à p inconnues

Système compatible : qui admet au moins une solution

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i & (L_i) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

- Les $a_{i,j}$ sont les coefficients du système.
- Les b_i forment le second membre du système.
- $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les inconnues du système.
- La i^{e} équation, ou i^{e} ligne, du système est notée L_i.

Système échelonné

$$
(S)\quad \begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ \dots + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\
\qquad\quad a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ \dots + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\
\qquad\qquad \ddots & \\
\qquad\qquad\qquad a_{r,r}x_r + \ \dots + a_{n,p}x_p = b_r & (L_r) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1} & (L_{r+1}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_n & (L_n)
\end{cases}
$$

avec $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\, r]\!]$.

Système échelonné

$$
(S)\quad \left\{\begin{array}{rcll}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\
a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\
\ddots & & & \\
a_{r,r}x_r + \dots + a_{n,p}x_p & = & b_r & (L_r) \\
0 & = & b_{r+1} & (L_{r+1}) \\
 & \vdots & & \\
0 & = & b_n & (L_n)
\end{array}\right.
$$

avec $a_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\,r]\!]$.

Méthode du pivot de Gauss

SF 1 : résolution d'un système échelonné

Exemple 1

Résoudre le système suivant (S_1) : $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 & (L_1) \\ 2y + 5z = 4 & (L_2) \\ 4z = 8 & (L_3) \end{cases}$

SF 1 : résolution d'un système échelonné

Exemple 2

Trouver un point et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ d'équations :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ y - 2z = 5 \end{cases}$$

▸ Figure

2 Opérations élémentaires

Définition 1

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. On appelle opération élémentaire l'une des opérations des types suivants

i) Echange de deux lignes, notée :

ii) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul :

iii) Addition à une ligne d'un multiple d'une autre :

2 Opérations élémentaires

Définition 1

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. On appelle opération élémentaire l'une des opérations des types suivants

i) Echange de deux lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$

ii) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul :

iii) Addition à une ligne d'un multiple d'une autre :

2 Opérations élémentaires

Définition 1

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. On appelle opération élémentaire l'une des opérations des types suivants

$\alpha \neq 0$

i) Echange de deux lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$

ii) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

iii) Addition à une ligne d'un multiple d'une autre :

2 Opérations élémentaires

Définition 1

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. On appelle opération élémentaire l'une des opérations des types suivants

$\alpha \neq 0$

i) Echange de deux lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$

ii) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

iii) Addition à une ligne d'un multiple d'une autre : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$

$i \neq j$

2 Opérations élémentaires

Définition 1

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. On appelle opération élémentaire l'une des opérations des types suivants

$\alpha \neq 0$

i) Echange de deux lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$

ii) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$

iii) Addition à une ligne d'un multiple d'une autre : $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$

$i \neq j$

Exemple 3

Trouver un point et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

3 Méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires

Principes de la méthode

- Etape 1 : *Echelonnement.* Par des opérations élémentaires, on transforme (S) en un système échelonné

3 Méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires

Principes de la méthode

- Etape 1 : *Echelonnement.* Par des opérations élémentaires, on transforme (S) en un système échelonné
- Etape 2 : *Remontée.* On résout ce système par remontée.

3 Méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires

Principes de la méthode

- Etape 1 : *Echelonnement.* Par des opérations élémentaires, on transforme (S) en un système échelonné
- Etape 2 : *Remontée.* On résout ce système par remontée.

Exemple 4

Résoudre

$$(S_1)\ \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ x + y + 2t = 3 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2)\ \begin{cases} y + t = -1 \\ x + 2y + z + 3t = 1 \\ x + z + t = 3 \\ x + y + z + 2t = 2 \end{cases}$$

SF 4 : Discuter et résoudre un système avec un paramètre

Exemple 5

Résoudre en fonction de m : $(S_3)\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ mx + 2y + z = m \\ x + 3y + 2mz = 0 \end{cases}$

3 Méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires

SF 4 : Discuter et résoudre un système avec un paramètre

Exemple 5

Résoudre en fonction de m : $(S_3)\begin{cases} x + 2y + mz = 1 \\ mx + 2y + z = m \\ x + 3y + 2mz = 0 \end{cases}$

m n'est pas une inconnue mais un coefficient Figure

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Définition 2

On appelle *déterminant du système* (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le

nombre :

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Définition 2

On appelle *déterminant du système* (S) $\begin{cases} ax + \ by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre : $ab' - a'b$

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Définition 2

On appelle *déterminant du système* (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre : $ab' - a'b$ noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Définition 2

On appelle *déterminant du système* (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre : $ab' - a'b$ noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Théorème 1

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors (S) a une unique solution donnée par :

Définition 2

On appelle *déterminant du système* (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre : $ab' - a'b$ noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Théorème 1

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors (S) a une unique solution donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Définition 2

On appelle *déterminant du système* (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre : $ab' - a'b$ noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Théorème 1

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors (S) a une unique solution donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

On divise par le déterminant

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Définition 2

On appelle *déterminant du système* (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre : $ab' - a'b$ noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Théorème 1

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors (S) a une unique solution donnée par :

On remplace la colonne des x par le second membre

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

On divise par le déterminant

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Définition 2

On appelle *déterminant du système* (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre : $ab' - a'b$ noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Théorème 1

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors (S) a une unique solution donnée par :

On remplace la colonne des x par le second membre

On remplace la colonne des y par le second membre

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

On divise par le déterminant

On divise par le déterminant

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Théorème 1

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors (S) a une unique solution donnée par :

On remplace la colonne des x par le second membre

On remplace la colonne des y par le second membre

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

On divise par le déterminant

On divise par le déterminant

Exemple 6

a) Résoudre : $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ b) Résoudre : $\begin{cases} mx + y = m \\ 4x + my = 2m \end{cases}$

4 Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Théorème 1

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors (S) a une unique solution donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Exercice 1

Démontrer le théorème.