Equations différentielles linéaires

Chapitre 7

I Equations du premier ordre

1 Généralités

Cadre

On étudie les équations de la forme : $\quad (E) \quad y' + a(t)\, y \; = b(t)$

1 Généralités

Cadre

On étudie les équations de la forme : $(E) \quad y' + a(t)\, y = b(t)$

1 Généralités

Cadre

On étudie les équations de la forme : $(E) \quad y' + a(t)\,y = b(t)$

L'inconnue est une fonction

2 Résolution de l'équation homogène

Cadre

- On cherche à résoudre (E_0) : y'+a(t)y =0
- On note A une primitive de a sur I.

2 Résolution de l'équation homogène

Cadre

- On cherche à résoudre (E_0) : y'+a(t)y =0
- On note A une primitive de a sur I.

Théorème 1

Les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.

2 Résolution de l'équation homogène

Cadre

- On cherche à résoudre (E_0) : y'+a(t)y =0
- On note A une primitive de a sur I.

Théorème 1

Les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.

Exercice 1

Démontrer le théorème.

Retenir :
$(y' + ay)e^A = (ye^A)'$

Cadre

- On cherche à résoudre (E_0) : y'+a(t)y =0
- On note A une primitive de a sur I.

Théorème 1

Les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.

Exercice 1

Démontrer le théorème.

3 Equations avec second membre

Cadre

- On cherche à résoudre (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$

Cadre

- On cherche à résoudre (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$
- On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E)

3 Equations avec second membre

Cadre

- On cherche à résoudre (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$
- On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E)

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

3 Equations avec second membre

Cadre

- On cherche à résoudre (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$
- On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E)

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

3 Equations avec second membre

Cadre

- On cherche à résoudre (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$
- On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E)

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

$$\boxed{\text{Les}}\ \text{solutions de } (E) \quad = \quad \boxed{\text{Une}}\ \text{solution particulière} \quad + \quad \boxed{\text{Les}}\ \text{solutions de } (E_0)$$

3 Equations avec second membre

Cadre

- On cherche à résoudre (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$
- On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E)

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

$$\boxed{\text{Les}}\text{ solutions de }(E) \quad = \quad \boxed{\text{Une}}\text{ solution particulière} \quad + \quad \boxed{\text{Les}}\text{ solutions de }(E_0)$$

Exercice 2

Démontrer le théorème.

3 Equations avec second membre

Cadre

- On cherche à résoudre (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$
- On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E)

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

$$\boxed{\text{Les}}\ \text{solutions de } (E) = \boxed{\text{Une}}\ \text{solution particulière} + \boxed{\text{Les}}\ \text{solutions de } (E_0)$$

Exercice 2

Démontrer le théorème.

3 Equations avec second membre

Cadre

- On cherche à résoudre (E) : $\quad y' + a(t)y = b(t)$
- On suppose avoir trouvé *une solution particulière* y_1 de (E)

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

$\boxed{\text{Les}}$ solutions de (E) = $\boxed{\text{Une}}$ solution particulière + $\boxed{\text{Les}}$ solutions de (E_0)

Exercice 3

Montrer que l'on peut trouver une solution particulière de (E) sous la forme $y_1(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$.

3 Equations avec second membre

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Equation homogène	**2. Variation de la constante**	**3. Conclusion**
Les solutions sont les fonctions de la forme :	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme :	*Les* solutions sont toutes les fonctions y de la forme

3 Equations avec second membre

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Equation homogène	2. Variation de la constante	3. Conclusion
Les solutions sont les fonctions de la forme : $y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme :	*Les* solutions sont toutes les fonctions y de la forme

3 Equations avec second membre

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Equation homogène	**2. Variation de la constante**	**3. Conclusion**
Les solutions sont les fonctions de la forme : $y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme : $y_1 : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ y_1 est solution si $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$	*Les* solutions sont toutes les fonctions y de la forme

3 Equations avec second membre

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Equation homogène	2. Variation de la constante	3. Conclusion
Les solutions sont les fonctions de la forme : $y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme : $y_1 : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ y_1 est solution si $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$	*Les* solutions sont toutes les fonctions y de la forme $y = y_0 + y_1$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Equation homogène	2. Variation de la constante	3. Conclusion
Les solutions sont les fonctions de la forme : $y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme : $y_1 : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ y_1 est solution si $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$	*Les* solutions sont toutes les fonctions y de la forme $y = y_0 + y_1$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

Exemple 1

a) Résoudre : $\quad y' + \dfrac{1}{t}y = t \quad$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Equations avec second membre

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Equation homogène	2. Variation de la constante	3. Conclusion
Les solutions sont les fonctions de la forme : $y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme : $y_1 : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ y_1 est solution si $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$	*Les* solutions sont toutes les fonctions y de la forme $y = y_0 + y_1$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

Exemple 1

b) Résoudre : $\quad y' + y = \dfrac{1}{1+e^t} \quad$ sur $\mathbb{R}$.

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Equation homogène	2. Variation de la constante	3. Conclusion
Les solutions sont les fonctions de la forme : $y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme : $y_1 : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ y_1 est solution si $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$	*Les* solutions sont toutes les fonctions y de la forme $y = y_0 + y_1$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

Exemple 2

Trouver une solution particulière de $y' + ty = 2t$.

SF 1 : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Equation homogène	2. Variation de la constante	3. Conclusion
Les solutions sont les fonctions de la forme : $y_0 : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque	On cherche *une* solution particulière y_1 sous la forme : $y_1 : t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ y_1 est solution si $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$ pour tout $t \in I$	*Les* solutions sont toutes les fonctions y de la forme $y = y_0 + y_1$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0)

Exemple 3

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Résoudre : $y' + \alpha y = \beta$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4 : Principe de superposition

Si :

- y_1 est une solution de l'équation : $y' + a(t)y = b_1$.
- y_2 est une solution de l'équation : $y' + a(t)y = b_2$.

Alors : $y_1 + y_2$ est solution de : $y' + a(t)y(t) = b_1 + b_2$

3 Equations avec second membre

Exemple 4 : Principe de superposition

Si :

- y_1 est une solution de l'équation : $y' + a(t)y = b_1$.
- y_2 est une solution de l'équation : $y' + a(t)y = b_2$.

Alors : $y_1 + y_2$ est solution de : $y' + a(t)y(t) = b_1 + b_2$

Exemple 5

Résoudre : $y' + \frac{1}{t}y = t + \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3 : Conditions initiales – le problème de Cauchy

Pour tout $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution de :

Théorème 3 : Conditions initiales – le problème de Cauchy

Pour tout $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution de :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) & \text{sur } I \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Théorème 3 : Conditions initiales – le problème de Cauchy

Pour tout $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution de :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \quad \text{sur } I \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Problème de Cauchy
$=$ Equa. diff $+$ Condition initiale

3 Equations avec second membre

Théorème 3 : Conditions initiales – le problème de Cauchy

Pour tout $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution de :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) & \text{sur } I \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Problème de Cauchy
= Equa. diff + Condition initiale

Exemple 6

Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{t}y = t & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Application classique : une équation fonctionnelle

SF 5 : Equation fonctionnelle et équation différentielle

Exemple 7

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant :

$$\forall x, t \in \mathbb{R}, \quad f(x+t) = f(x)f(t)$$

II Equations du second ordre à coefficients constants

Cadre

On étudie l'équation différentielle : $\quad (E) \qquad y'' + ay' + by = s(t)$

Cadre

On étudie l'équation différentielle : $(E) \qquad y'' + ay' + by = s(t)$

Théorème 1 : Théorème de structure

Si y_1 une solution particulière de (E), alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $y_1 + y_0$ où y_0 est une solution quelconque de (E_0) .

Equation homogène
$y'' + ay' + by = 0$

Cadre

On étudie l'équation différentielle : $(E) \qquad y'' + ay' + by = s(t)$

Théorème 2 : Principe de superposition

Si :

- y_1 est une solution de l'équation : $y'' + ay' + by = s_1(t)$.
- y_2 est une solution de l'équation : $y'' + ay' + by = s_2(t)$.

Alors : $y_1 + y_2$ est solution de : $y'' + ay' + by = s_1(t) + s_2(t)$

Cadre

On étudie l'équation différentielle : $(E) \qquad y'' + ay' + by = s(t)$

Théorème 3 : Conditions initiales

Soit $t_0 \in I$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = s(t) & \text{sur } I \\ y(t_0) = \alpha \quad \text{et} \quad y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

1 Equation caractéristique

Exercice 1

Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}$ la fonction $y : t \mapsto e^{\lambda t}$ est-elle solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$?

2 Résolution de l'équation homogène

Cadre

- On cherche à résoudre (E_0) : $\quad y'' + ay' + by = 0$
- λ_1 λ_2 sont les racines complexes de $(\mathscr{C})$: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Equation caractéristique

2 Résolution de l'équation homogène

Cadre

- On cherche à résoudre (E_0) : $\quad y'' + ay' + by = 0$
- λ_1 λ_2 sont les racines complexes de $(\mathscr{C})$: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Equation caractéristique

Exercice 2

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable. Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si $z : t \mapsto y(t)e^{-\lambda_1 t}$ est solution de

$$z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$$

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta = 0$	λ_0	

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème 2 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Signe de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta = 0$	λ_0	
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème 2 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Signe de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème 2 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Signe de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y : t \mapsto e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème 2 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Signe de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y : t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$

Exercice 3

Démontrer le théorème dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème 2 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Signe de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y : t \mapsto e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

Exemple 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$: a) $y'' + 4y' - 5y = 0$

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème 2 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Signe de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y : t \mapsto e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

Exemple 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$: b) $y'' - 2y' + y = 0$

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

Théorème 2 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Signe de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y : t \mapsto e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

Exemple 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$: c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 1 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Valeur de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$

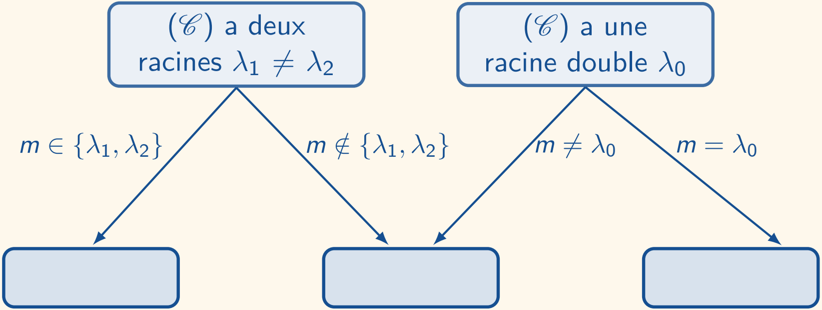
Théorème 2 : Solutions de (E_0) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Signe de Δ	Racines de $(\mathscr{C})$	Les solutions de (E_0) sont les fonctions :
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	$t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0	$t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$y : t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$

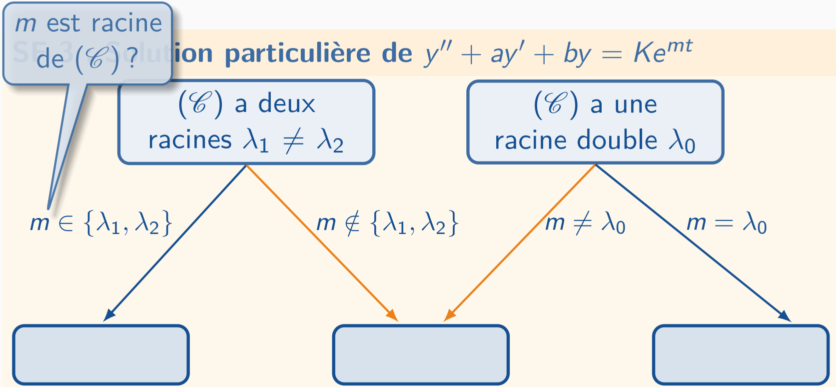
Exemple 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$: d) $y'' + \omega^2 y = 0$

SF 3 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = Ke^{mt}$

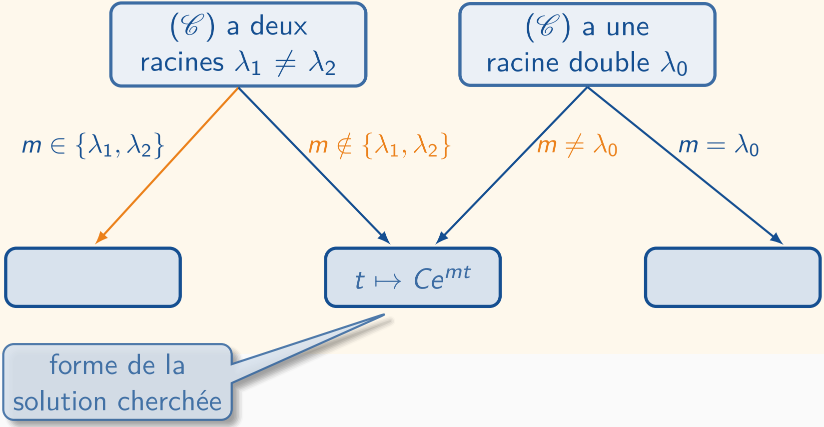


SF 3 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = Ke^{mt}$



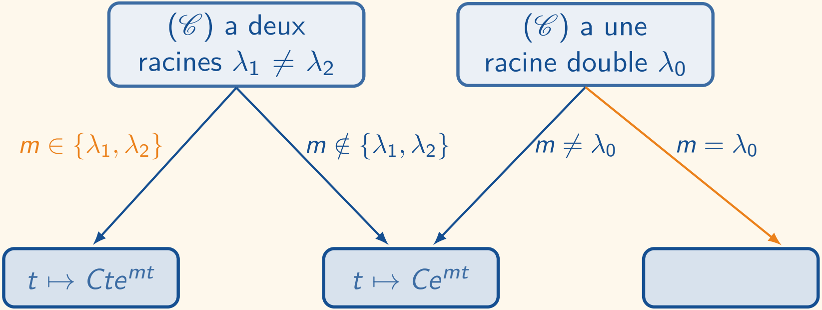
3 Equations avec second membre exponentiel

SF 3 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = Ke^{mt}$



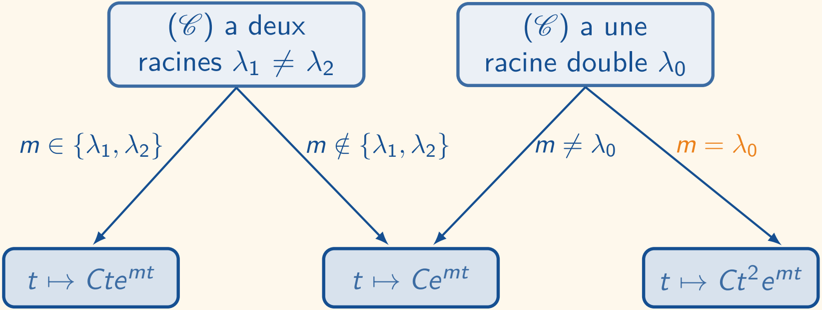
3 Equations avec second membre exponentiel

SF 3 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = Ke^{mt}$

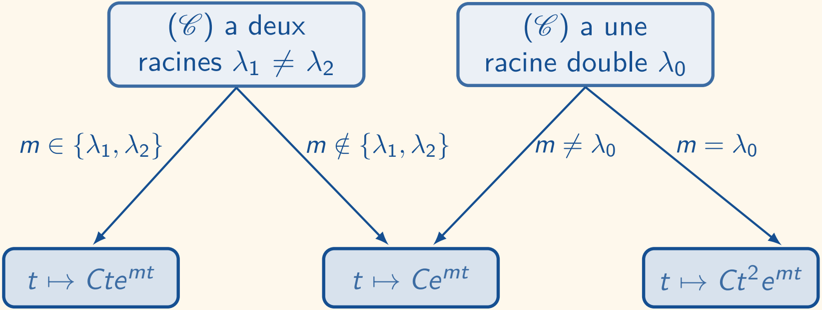


3 Equations avec second membre exponentiel

SF 3 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = Ke^{mt}$



SF 3 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = Ke^{mt}$



Exemple 2

Résoudre : a) $y'' - y' - 2y = e^t$ b) $y'' - y' - 2y = 2\,\mathrm{ch}\,t$

SF 4 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = K\cos\omega t$ ou $K\sin\omega t$

1. On cherche une solution particulière pour le second membre $s(t) = Ke^{i\omega t}$

3 Equations avec second membre exponentiel

SF 4 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = K\cos\omega t$ ou $K\sin\omega t$

1. On cherche une solution particulière pour le second membre $s(t) = Ke^{i\omega t}$
2. On prend la partie réelle ou la partie imaginaire de la solution obtenue.

3 Equations avec second membre exponentiel

SF 4 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = K\cos\omega t$ ou $K\sin\omega t$

1. On cherche une solution particulière pour le second membre $s(t) = Ke^{i\omega t}$
2. On prend la partie réelle ou la partie imaginaire de la solution obtenue.

Exemple 3

Résoudre l'équation différentielle : $\quad y'' - y' - 2y = 10\cos t$

3 Equations avec second membre exponentiel

SF 4 : Solution particulière de $y'' + ay' + by = K\cos\omega t$ ou $K\sin\omega t$

1. On cherche une solution particulière pour le second membre $s(t) = Ke^{i\omega t}$
2. On prend la partie réelle ou la partie imaginaire de la solution obtenue.

Exemple 4

Soient $\omega, \rho \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre : $\quad y'' + \omega^2 y = \sin(\rho t)$. ▸ Figure

4 Application classique : une (autre) équation fonctionnelle

SF 5 : Equation fonctionnelle et équation différentielle (2)

Exemple 5

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\pi - x)$$