

Calcul de primitives

Chapitre 6

I Primitives et intégrales

I Primitives et intégrales

II Méthodes directes pour le calcul de primitives

III Techniques d'intégration pour la recherche de primitives

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i)

ii) $F' = f$.

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

- i) F est dérivable sur I
- ii) $F' = f$.

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

- i) F est dérivable sur I
- ii) $F' = f$.

Exemple 1

La fonction Arctan est une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

- i) F est dérivable sur I
- ii) $F' = f$.

Exemple 2

Montrer que la fonction $F : x \mapsto -\ln(\cos x)$ est une primitive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction \tan .

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

- i) F est dérivable sur I
- ii) $F' = f$.

Exemple 3

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, une primitive de $t \mapsto e^{\lambda t}$ sur \mathbb{R} est $t \mapsto \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}$.

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

- i) F est dérivable sur I
- ii) $F' = f$.

Remarque

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur I alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I .

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

- i) F est dérivable sur I
- ii) $F' = f$.

Exemple 4

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est la fonction

1 Primitives

intervalle

\mathbb{R} ou \mathbb{C}

fonction de I dans \mathbb{K}

Définition 1

Une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

- i) F est dérivable sur I ii) $F' = f$.

Exemple 4

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est

la fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

1 Primitives

Exemple 5

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est

la fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Théorème 1

On suppose que f admet une primitive F_0 sur I .

Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme :

1 Primitives

Exemple 5

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est

la fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Théorème 1

On suppose que f admet une primitive F_0 sur I .

Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme :

$$F_0 + k \quad \text{où } k \in \mathbb{K} \text{ est une constante quelconque}$$

1 Primitives

Exemple 5

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est la fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Théorème 1

On suppose que f admet une primitive F_0 sur I .

Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme :

$$F_0 + k \quad \text{où } k \in \mathbb{K} \text{ est une constante quelconque}$$

Exercice 1

Démontrer ce théorème.

2 Lien avec les intégrales

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I .

2 Lien avec les intégrales

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I .

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I

2 Lien avec les intégrales

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I .

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I

2 Lien avec les intégrales

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I .

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

2 Lien avec les intégrales

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I .

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Conséquence

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

2 Lien avec les intégrales

Théorème 3

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :
Pour tous $a, b \in I$:

2 Lien avec les intégrales

Théorème 3

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :
Pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

2 Lien avec les intégrales

Théorème 3

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :
Pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

noté $[F(t)]_a^b$

2 Lien avec les intégrales

Théorème 3

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :
Pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Exercice 2

noté $[F(t)]_a^b$

Démontrer ce théorème à l'aide du théorème fondamental de l'analyse.

II Méthodes directes pour le calcul de primitives

I Primitives et intégrales

II Méthodes directes pour le calcul de primitives

III Techniques d'intégration pour la recherche de primitives

1 Primitives de référence : deux tableaux à connaître

1 Primitives de référence : deux tableaux à connaître

Exemple 1

Déterminer une primitive de :

a) $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$

b) $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$

c) $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^6}$

d) $x \mapsto \frac{x^5}{1+x^6}$

e) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

f) $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$

2 Primitivation d'expressions trigonométriques

SF 4 : Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La **linéarisation** est une méthode générale pour calculer ce type de primitives.

2 Primitivation d'expressions trigonométriques

SF 4 : Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La linéarisation est une méthode générale pour calculer ce type de primitives.

Euler + binôme

2 Primitivation d'expressions trigonométriques

SF 4 : Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La linéarisation est une méthode générale pour calculer ce type de primitives.

Euler + binôme

Exemple 2

1. Ex. 31.1, banque INP. Calculer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$
2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^2 x \cos x$ de deux façons différentes.

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

1. On écrit $e^{ax} \cos bx = e^{ax} \operatorname{Re}(e^{ibx}) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$;

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

1. On écrit $e^{ax} \cos bx = e^{ax} \operatorname{Re}(e^{ibx}) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$;
2. Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x}$

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

1. On écrit $e^{ax} \cos bx = e^{ax} \operatorname{Re}(e^{ibx}) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$;
2. Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x}$
3. On prend la partie réelle .

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

1. On écrit $e^{ax} \cos bx = e^{ax} \operatorname{Re}(e^{ibx}) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$;

2. Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x}$

3. On prend la partie réelle .

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} e^{ibx} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a-ib)(\cos bx + i \sin bx)$$

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

1. On écrit $e^{ax} \cos bx = e^{ax} \operatorname{Re}(e^{ibx}) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$;

2. Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x}$

3. On prend la partie réelle .

Exemple 3

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} e^{ibx} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a-ib)(\cos bx + i \sin bx)$$

Déterminer une primitive des fonctions :

a) $f: x \mapsto e^x \cos(2x)$.

b) $g: x \mapsto e^{-3x} \sin(2x)$

4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Principe

Tout dépend du nombre de racines réelles de $ax^2 + bx + c$.

Exemple 4

Trouver une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2x^2 + 5x - 3}$$

4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Principe

Tout dépend du nombre de racines réelles de $ax^2 + bx + c$.

Exemple 5

Trouver une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{4x^2 + 4x + 1}$$

4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ est

4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$

4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x + \alpha)^2 + \beta^2}$ est :

4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x + \alpha)^2 + \beta^2}$ est : $x \mapsto \frac{1}{\beta} \operatorname{Arctan} \frac{x + \alpha}{\beta}$

4 Primitive de $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x + \alpha)^2 + \beta^2}$ est : $x \mapsto \frac{1}{\beta} \operatorname{Arctan} \frac{x + \alpha}{\beta}$

Exemple 6

Calculer une primitive sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$

III Techniques d'intégration pour la recherche de primitives

I Primitives et intégrales

II Méthodes directes pour le calcul de primitives

III Techniques d'intégration pour la recherche de primitives

Définition 1

f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si :

- f est dérivable sur I ▪

Définition 1

f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si :

- f est dérivable sur I
- La fonction f' est continue sur I

1 Intégration par parties

Définition 1

f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si :

- f est dérivable sur I
- La fonction f' est continue sur I

Théorème 1 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

1 Intégration par parties

Définition 1

f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si :

- f est dérivable sur I
- La fonction f' est continue sur I

Théorème 1 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

1 Intégration par parties

Définition 1

f est de classe \mathcal{C}^1 sur I si :

- f est dérivable sur I
- La fonction f' est continue sur I

Théorème 1 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Exercice 1

Démontrer le théorème

1 Intégration par parties

Théorème 2 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

SF 9 : Effectuer une intégration par parties

Exemple 1

Calculer $\int_0^\pi t \cos t dt$.

1 Intégration par parties

Théorème 2 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

SF 9 : Effectuer une intégration par parties

Exemple 2

- a) Déterminer les primitives de \ln sur \mathbb{R}_+^*
- b) Déterminer les primitives de Arctan sur \mathbb{R}

2 Changement de variable

Théorème 3 : Formule du changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, à valeurs dans I .

2 Changement de variable

Théorème 3 : Formule du changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, à valeurs dans I .

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

2 Changement de variable

Théorème 3 : Formule du changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, à valeurs dans I .

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

Exercice 2

Démontrer le théorème.

Exemple 3

Calculer $I = \int_1^e \frac{1}{t + t \ln t} dt$ en posant $x = \ln t$:

$$\int_1^e \frac{1}{t + t \ln t} dt \underset{x=\ln t}{=} \int_{\dots}^{\dots} ? dt$$

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

La pratique

Au brouillon on « dérive » $x = \varphi(t)$:

- $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ « donc » $dx = \varphi'(t) dt$

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

La pratique

Au brouillon on « dérive » $x = \varphi(t)$:

▪ $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ « donc » $dx = \varphi'(t) dt$

Le « futur » dx

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

La pratique

Au brouillon on « dérive » $x = \varphi(t)$:

Le « futur » dx

▪ $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ « donc » $dx = \varphi'(t) dt$

▪ puis :

1. on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$;
2. on remplace $\varphi'(t) dt$ par dx ;

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ en posant $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b \boxed{f(\varphi(t))} \boxed{\varphi'(t) dt} \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\dots}^{\dots} \boxed{f(x)} \boxed{dx}$$

①

②

La pratique

Au brouillon on « dérive » $x = \varphi(t)$:

Le « futur » dx

■ $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ « donc » $dx = \varphi'(t) dt$

■ puis :

1. on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$;
2. on remplace $\varphi'(t) dt$ par dx ;
3. on remplace les bornes.

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b \underbrace{f(\varphi(t))}_{①} \underbrace{\varphi'(t) dt}_{②} \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \underbrace{f(x)}_{①} \underbrace{dx}_{②}$$

③

Exemple 3

Calculer $I = \int_1^e \frac{1}{t + t \ln t} dt$ en posant $x = \ln t$:

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ en posant $x = \varphi(t)$

The diagram illustrates the substitution method for integration. It shows the transformation of an integral from t to x using the substitution $x = \varphi(t)$.

On the left, the integral \int_a^b is shown. The integrand is split into two parts, each in a light blue box:

- Box ①: $f(\varphi(t))$
- Box ②: $\varphi'(t) dt$

These are separated by an equals sign with the substitution $x = \varphi(t)$ written below it. On the right, the transformed integral is shown with its own parts in light blue boxes:

- Box ①: $f(x)$
- Box ②: dx

Curved blue arrows indicate the mapping of components:

- An arrow from the upper limit b of the first integral to the upper limit $\varphi(b)$ of the second.
- An arrow from the lower limit a of the first integral to the lower limit $\varphi(a)$ of the second.
- A long curved arrow at the bottom, labeled with a circled ③, representing the overall substitution process.

2 Changement de variable

Exemple 4

Calculer $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin t$.

2 Changement de variable

Exemple 4

Calculer $I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en posant $x = \sin t$.

Calculer : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ en posant $x = \varphi(t)$

The diagram illustrates the change of variable formula for integration. It shows the transformation of an integral from the x -domain to the t -domain. On the left, the integral $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ is shown, with $f(x)$ labeled ① and dx labeled ②. On the right, the integral $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ is shown, with $f(\varphi(t))$ labeled ① and $\varphi'(t) dt$ labeled ②. A curved arrow labeled ③ connects the two integrals, indicating the substitution $x = \varphi(t)$ and the corresponding change in limits from α to β to a to b .

$$\int_{\alpha}^{\beta} \underset{\textcircled{1}}{f(x)} \underset{\textcircled{2}}{dx} \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_a^b \underset{\textcircled{1}}{f(\varphi(t))} \underset{\textcircled{2}}{\varphi'(t) dt}$$

2 Changement de variable

Exemple 5

Calculer :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt \quad \text{en posant : } x = e^t$$

$$\text{b) } I_2 = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt \quad \text{en posant : } t = \frac{1}{s}$$

2 Changement de variable

Exemple 5

Calculer :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt \quad \text{en posant : } x = e^t$$

$$\text{b) } I_2 = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt \quad \text{en posant : } t = \frac{1}{s}$$

Exemple 6

Calculer une primitive sur \mathbb{R}_+^* de $t \mapsto \cos(2 \ln t)$ à l'aide du changement de variable $t = e^u$.

2 Changement de variable

Exemple 7

Calculer une primitive sur $]0, \pi[$ de $\theta \mapsto \frac{1}{\sin \theta}$

a) à l'aide du changement de variable $t = \cos \theta$.

b) à l'aide du changement de variable $t = \tan \frac{\theta}{2}$.

2 Changement de variable

Exemple 7

Calculer une primitive sur $]0, \pi[$ de $\theta \mapsto \frac{1}{\sin \theta}$

a) à l'aide du changement de variable $t = \cos \theta$.

b) à l'aide du changement de variable $t = \tan \frac{\theta}{2}$.

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$