Calcul de primitives

Chapitre 6

I Primitives et intégrales

1 Primitives

intervalle

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

1 Primitives

intervalle — $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ — fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

1 Primitives

intervalle

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i)

ii) $F' = f$.

1 Primitives

intervalle

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i) F est dérivable sur I ii) $F' = f$.

1 Primitives

intervalle

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i) F est dérivable sur I ii) $F' = f$.

Exemple 1

La fonction Arctan est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

1 Primitives

intervalle

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :
i) F est dérivable sur I ii) $F' = f$.

Exemple 2

Montrer que la fonction $F : x \mapsto -\ln(\cos x)$ est une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan.

1 Primitives

intervalle

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i) F est dérivable sur I ii) $F' = f$.

Exemple 3

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, une primitive de $t \mapsto e^{\lambda t}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \dfrac{e^{\lambda t}}{\lambda}$.

1 Primitives

intervalle

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i) F est dérivable sur I ii) $F' = f$.

Remarque

Soit $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur I alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

1 Primitives

intervalle $\quad$ $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\quad$ fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i) F est dérivable sur I $\qquad$ ii) $F' = f$.

Exemple 4

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est

la fonction

1 Primitives

intervalle

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

fonction de I dans $\mathbb{K}$

Définition 1

Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si :

i) F est dérivable sur I ii) $F' = f$.

Exemple 4

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Exemple 5

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Théorème 1

On suppose que f admet une primitive F_0 sur I.
Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme :

1 Primitives

Exemple 5

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Théorème 1

On suppose que f admet une primitive F_0 sur I.
Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme :

$$F_0 + k \quad \text{où } k \in \mathbb{K} \text{ est une constante quelconque}$$

1 Primitives

Exemple 5

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la fonction $F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Théorème 1

On suppose que f admet une primitive F_0 sur I.
Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme :

$$F_0 + k \quad \text{où } k \in \mathbb{K} \text{ est une constante quelconque}$$

Exercice 1

Démontrer ce théorème.

2 Lien avec les intégrales

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I.

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Théorème 2 : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $a \in I$. On suppose $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I.

- La fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I
- Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Conséquence

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

2 Lien avec les intégrales

Théorème 3

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :
Pour tous $a, b \in I$:

2 Lien avec les intégrales

Théorème 3

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :
Pour tous $a, b \in I$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

2 Lien avec les intégrales

Théorème 3

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :
Pour tous $a, b \in I$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

noté $[F(t)]_a^b$

2 Lien avec les intégrales

Théorème 3

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue et si F une primitive de f :
Pour tous $a, b \in I$:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

noté $[F(t)]_a^b$

Exercice 2

Démontrer ce théorème à l'aide du théorème fondamental de l'analyse.

II Méthodes directes pour le calcul de primitives

1 Primitives de référence : deux tableaux à connaître

Exemple 1

Déterminer une primitive de :

a) $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$

b) $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$

c) $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^6}$

d) $x \mapsto \dfrac{x^5}{1+x^6}$

e) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

f) $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

2 Primitivation d'expressions trigonométriques

SF 4 : Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La linéarisation est une méthode générale pour calculer ce type de primitives.

SF 4 : Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La linéarisation est une méthode générale pour calculer ce type de primitives.

Euler + binôme

2 Primitivation d'expressions trigonométriques

SF 4 : Primitives de $t \mapsto \cos^p t \sin^q t$, où $p, q \in \mathbb{N}$

La linéarisation est une méthode générale pour calculer ce type de primitives.

Euler + binôme

Exemple 2

1. *Ex. 31.1, banque INP.* Calculer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$
2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^2 x \cos x$ de deux façons différentes.

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos bx$ et $x \mapsto e^{ax}\sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos bx$

1. On écrit $e^{ax}\cos bx = e^{ax}\,\mathrm{Re}\big(e^{ibx}\big) = \mathrm{Re}\big(e^{(a+ib)x}\big)$;

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos bx$ et $x \mapsto e^{ax}\sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos bx$

1. On écrit $e^{ax}\cos bx = e^{ax}\,\mathrm{Re}\left(e^{ibx}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(a+ib)x}\right)$;
2. Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}$

3 Utilisation des complexes

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos bx$ et $x \mapsto e^{ax}\sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos bx$

1. On écrit $e^{ax}\cos bx = e^{ax}\,\mathrm{Re}\big(e^{ibx}\big) = \mathrm{Re}\big(e^{(a+ib)x}\big)$;
2. Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}$
3. On prend la partie réelle .

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos bx$ et $x \mapsto e^{ax}\sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos bx$

1. On écrit $e^{ax}\cos bx = e^{ax}\,\mathrm{Re}\left(e^{ibx}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(a+ib)x}\right)$;
2. Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}$
3. On prend la partie réelle .

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}e^{ibx} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos bx + i\sin bx)$$

SF 5 : Primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

1. On écrit $e^{ax} \cos bx = e^{ax} \operatorname{Re}(e^{ibx}) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x})$;
2. Une primitive de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ est $x \mapsto \boxed{\dfrac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x}}$
3. On prend la partie réelle .

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} e^{ibx} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos bx + i \sin bx)$$

Exemple 3

Déterminer une primitive des fonctions :

a) $f : x \mapsto e^x \cos(2x)$.

b) $g : x \mapsto e^{-3x} \sin(2x)$

4 Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Principe

Tout dépend du nombre de racines réelles de $ax^2 + bx + c$.

Exemple 4

Trouver une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2x^2 + 5x - 3}$$

4 Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Principe

Tout dépend du nombre de racines réelles de $ax^2 + bx + c$.

Exemple 5

Trouver une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{4x^2 + 4x + 1}$$

4 Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ est

4 Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{a}$

4 Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{a}$
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}$ est :

4 Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{a}$
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}$ est : $x \mapsto \dfrac{1}{\beta} \operatorname{Arctan} \dfrac{x+\alpha}{\beta}$

4 Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Théorème 1 : Le trinôme n'a pas de racine réelle

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{a}$
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x+\alpha)^2 + \beta^2}$ est : $x \mapsto \dfrac{1}{\beta} \operatorname{Arctan} \dfrac{x+\alpha}{\beta}$

Exemple 6

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

III Techniques d'intégration pour la recherche de primitives

Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 1

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

- f est dérivable sur I
-

Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 1

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

- f est dérivable sur I
- La fonction f' est continue sur I

1 Intégration par parties

Définition 1

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

- f est dérivable sur I
- La fonction f' est continue sur I

Théorème 1 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$.

1 Intégration par parties

Définition 1

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

- f est dérivable sur I
- La fonction f' est continue sur I

Théorème 1 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

1 Intégration par parties

Définition 1

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si :

- f est dérivable sur I
- La fonction f' est continue sur I

Théorème 1 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 1

Démontrer le théorème

1 Intégration par parties

Théorème 2 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

SF 9 : Effectuer une intégration par parties

Exemple 1

Calculer $\displaystyle\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t$.

1 Intégration par parties

Théorème 2 : Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

SF 9 : Effectuer une intégration par parties

Exemple 2

a) Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Déterminer les primitives de Arctan sur $\mathbb{R}$

2 Changement de variable

Théorème 3 : Formule du changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$, à valeurs dans I.

Théorème 3 : Formule du changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$, à valeurs dans I.

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2 Changement de variable

Théorème 3 : Formule du changement de variable

Soit f une fonction continue sur I et soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$, à valeurs dans I.

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 2

Démontrer le théorème.

La pratique

Exemple 3

Calculer $\quad I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t + t\ln t}\,\mathrm{d}t \quad$ en posant $x = \ln t$:

$$\int_1^e \frac{1}{t + t\ln t}\,\mathrm{d}t \underset{x=\ln t}{=} \int_{\dots}^{\dots} ?\,\mathrm{d}t$$

La pratique

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

La pratique

Au brouillon on « dérive » $x = \varphi(t)$:

- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ « donc » $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

La pratique

Au brouillon on « dérive » $x = \varphi(t)$:

Le « futur » dx

- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ « donc » $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

La pratique

Au brouillon on « dérive » $x = \varphi(t)$:

Le « futur » $\mathrm{d}x$

- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ « donc » $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
- puis :
  1. on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$;
  2. on remplace $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$;

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\;\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\dots}^{\dots} f(x)\;\mathrm{d}x$$

La pratique

Au brouillon on « dérive » $x = \varphi(t)$:

Le « futur » dx

- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$ « donc » $\mathrm{d}x = \boxed{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$
- puis :
  1. on remplace $f(\varphi(t))$ par $f(x)$;
  2. on remplace $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$;
  3. on remplace les bornes.

Calculer : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b \underbrace{f(\varphi(t))}_{①}\ \underbrace{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}_{②} \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \underbrace{f(x)}_{①}\ \underbrace{\mathrm{d}x}_{②}$$

③

Exemple 3

Calculer $\quad I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t + t\ln t}\,\mathrm{d}t \quad$ en posant $x = \ln t$:

Calculer : $\quad \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b \underset{\textcircled{1}}{\boxed{f(\varphi(t))}}\ \underset{\textcircled{2}}{\boxed{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}} \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \underset{\textcircled{1}}{\boxed{f(x)}}\ \underset{\textcircled{2}}{\boxed{\mathrm{d}x}}$$

③

2 Changement de variable

Exemple 4

Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin t$.

Exemple 4

Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin t$.

Calculer : $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ **en posant** $x = \varphi(t)$

$$\int_\alpha^\beta \underbrace{f(x)}_{①}\ \underbrace{\mathrm{d}x}_{②} \underset{x=\varphi(t)}{=} \int_a^b \underbrace{f(\varphi(t))}_{①}\ \underbrace{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}_{②}$$

③

Exemple 5

Calculer :

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{e^t + e^{-t}} \, \mathrm{d}t$ en posant : $x = e^t$

b) $I_2 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} \, \mathrm{d}t$ en posant : $t = \frac{1}{s}$

2 Changement de variable

Exemple 5

Calculer :

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{e^t + e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ en posant : $x = e^t$

b) $I_2 = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ en posant : $t = \dfrac{1}{s}$

Exemple 6

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \cos(2\ln t)$ à l'aide du changement de variable $t = e^u$.

Exemple 7

Calculer une primitive sur $]0\,,\pi[$ de $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sin\theta}$

a) à l'aide du changement de variable $t = \cos\theta$.

b) à l'aide du changement de variable $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

Exemple 7

Calculer une primitive sur $]0\,,\pi[$ de $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sin\theta}$

a) à l'aide du changement de variable $t = \cos\theta$.

b) à l'aide du changement de variable $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$