Nombres complexes

Niveau 2

Chapitre 5

I Racines n-ièmes

Racine énième d'un complexe Z

Définition 1

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$.
On appelle *racine n-ième* de Z tout :

Racine énième d'un complexe Z

Définition 1

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$.
On appelle *racine n-ième* de Z tout : $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$.

Racine énième d'un complexe Z

Définition 1

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$.
On appelle *racine n-ième* de Z tout : $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$.

Exemple 1

Montrer que

a) $1 + i$ est une racine carrée de $2i$

b) $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine cubique de l'unité

Théorème 1

Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité, ce sont les complexes

1 Racines n-ièmes de l'unité

Théorème 1

Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité, ce sont les complexes

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{pour } k \in [\![0\,,n-1]\!]$$

1 Racines n-ièmes de l'unité

Théorème 1

Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité, ce sont les complexes

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{pour } k \in [\![0\,,n-1]\!]$$

Notation

L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

1 Racines n-ièmes de l'unité

Théorème 1

Il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité, ce sont les complexes

$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{pour } k \in [\![0\,,n-1]\!]$$

Notation

L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Exercice 1 : Ex. 84.2, banque INP

Démontrer le théorème en cherchant tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n = 1$.

1 Racines n-ièmes de l'unité

Théorème 2

1. Les racines n-ièmes de l'unité sont des puissances de ω_1 :

2. Pour $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle :

1 Racines n-ièmes de l'unité

Théorème 2

1. Les racines n-ièmes de l'unité sont des puissances de ω_1 :

$$\forall k \in [\![0\,,n-1]\!], \quad \omega_k = \omega_1^k$$

2. Pour $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle :

1 Racines n-ièmes de l'unité

Théorème 2

1. Les racines n-ièmes de l'unité sont des puissances de ω_1 :

$$\forall k \in [\![0\,, n-1]\!], \quad \omega_k = \omega_1^k$$

2. Pour $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$$

1 Racines n-ièmes de l'unité

Théorème 2

1. Les racines n-ièmes de l'unité sont des puissances de ω_1 :

$$\forall k \in [\![0\,,n-1]\!], \quad \omega_k = \omega_1^k$$

2. Pour $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$$

Exercice 2

Démontrer le théorème.

1 Racines n-ièmes de l'unité

Petites valeurs de n

- $\mathbb{U}_2 =$
- $\mathbb{U}_3 =$
- $\mathbb{U}_4 =$

1 Racines n-ièmes de l'unité

Petites valeurs de n

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 =$
- $\mathbb{U}_4 =$

Petites valeurs de n

les $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1 \ , \ e^{\frac{2i\pi}{3}} \ , \ e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$
- $\mathbb{U}_4 =$

Petites valeurs de n

les $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1 \ , \ e^{\frac{2i\pi}{3}} \ , \ e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$
- $\mathbb{U}_4 =$

$k = 0$

1 Racines n-ièmes de l'unité

Petites valeurs de n

les $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1 \ , \ e^{\frac{2i\pi}{3}} \ , \ e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$
- $\mathbb{U}_4 =$

$k = 0$ $\quad$ $k = 1$

Petites valeurs de n

les $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \left\{ 1 \,,\, e^{\frac{2i\pi}{3}} \,,\, e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$
- $\mathbb{U}_4 =$

$k = 0$ $k = 1$ $k = 2$

Petites valeurs de n

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \left\{ \underset{k=0}{1}, \underset{k=1}{e^{\frac{2i\pi}{3}}}, \underset{k=2}{e^{\frac{4i\pi}{3}}} \right\} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$
- $\mathbb{U}_4 =$

1 Racines n-ièmes de l'unité

Petites valeurs de n

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\right\} = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right\}$
- $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$

1 Racines n-ièmes de l'unité

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3e de l'unité sont :

Relations à retenir :

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3e de l'unité sont : $1,\quad j \quad \text{et} \quad j^2$
Relations à retenir :

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3e de l'unité sont : 1, j et j^2

Relations à retenir :

- $j^3 = 1$

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3e de l'unité sont : $1,\quad j\quad$ et $\quad j^2$

Relations à retenir :

- $j^3 = 1$
- $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3e de l'unité sont : $1, \quad j \quad \text{et} \quad j^2$

Relations à retenir :

- $j^3 = 1$
- $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$
- $1 + j + j^2 = 0$

1 Racines n-ièmes de l'unité

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3ᵉ de l'unité sont : $1, \quad j \quad \text{et} \quad j^2$

Relations à retenir :

- $j^3 = 1$
- $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$
- $1 + j + j^2 = 0$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \overline{j})$

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3e de l'unité sont : $1, \quad j \quad$ et $\quad j^2$

Relations à retenir :

- $j^3 = 1$
- $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$
- $1 + j + j^2 = 0$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \overline{j})$

Exemple 2

Simplifier le complexe $Z = \dfrac{1 + \overline{j}}{1 + j}$

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Définition 2

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines 3e de l'unité sont : $1, \quad j \quad$ et $\quad j^2$

Relations à retenir :

- $j^3 = 1$
- $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$
- $1 + j + j^2 = 0$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \overline{j})$

Exemple 4 : Ex. 84.3, banque INP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Résoudre l'équation : $\quad (z + i)^n = (z - i)^n \quad$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2 Racines n-ièmes d'un complexe Z non nul

Théorème 3

Le complexe $Z = re^{i\theta}$ possède exactement n racines n-ièmes, ce sont les complexes :

2 Racines n-ièmes d'un complexe Z non nul

Théorème 3

Le complexe $Z = re^{i\theta}$ possède exactement n racines n-ièmes, ce sont les complexes :

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{pour } k \in [\![0\,, n-1]\!].$$

2 Racines n-ièmes d'un complexe Z non nul

Théorème 3

Le complexe $Z = re^{i\theta}$ possède exactement n racines n-ièmes, ce sont les complexes :

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{pour } k \in [\![0\,, n-1]\!].$$

Exercice 3

Démontrer le théorème en commençant par vérifier que $z_0 = r^{\frac{1}{n}}\ e^{i\frac{\theta}{n}}$ convient.

2 Racines n-ièmes d'un complexe Z non nul

Théorème 3

Le complexe $Z = re^{i\theta}$ possède exactement n racines n-ièmes, ce sont les complexes :

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{pour } k \in [\![0\,, n-1]\!].$$

Exemple 5

Déterminer les racines cubiques de : $\quad Z = 2 + 2i.$

2 Racines n-ièmes d'un complexe Z non nul

Théorème 3

Le complexe $Z = re^{i\theta}$ possède exactement n racines n-ièmes, ce sont les complexes :

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, \qquad \text{pour } k \in [\![0\,, n-1]\!].$$

Exemple 6

Calculer *sous forme algébrique* les racines carrées de :

a) $Z = 2i$

b) $Z = 3 - 4i$

II Second degré dans $\mathbb{C}$

1 Calcul des racines carrées sous forme algébrique

Cadre

- On donne $Z \in \mathbb{C}^*$
- On cherche les deux racines carrées de Z.

1 Calcul des racines carrées sous forme algébrique

Cadre

☢ Pas de $\sqrt{Z}$ ☢

- On donne $Z \in \mathbb{C}^*$
- On cherche les deux racines carrées de Z .

1 Calcul des racines carrées sous forme algébrique

Cadre

- On donne $Z \in \mathbb{C}^*$
- On cherche les deux racines carrées de Z.

☢ Pas de $\sqrt{Z}$ ☢

SF 14 : calculer une racine carrée δ d'un complexe Z

Exemple 1

Calculer les racines carrées de $3 - 4i$.

2 Equation du second degré à coefficients complexes

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

2 Equation du second degré à coefficients complexes

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

Théorème 1

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

Théorème 1

- Si $\Delta = 0$, (E) a une solution unique :

2 Equation du second degré à coefficients complexes

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

Théorème 1

- Si $\Delta = 0$, (E) a une solution unique : $\boxed{z_0 = -\frac{b}{2a}}$

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

Théorème 1

- Si $\Delta = 0$, (E) a une solution unique : $\boxed{z_0 = -\frac{b}{2a}}$
- Si $\Delta \neq 0$, (E) a deux solutions distinctes :

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

Théorème 1

- Si $\Delta = 0$, (E) a une solution unique : $\boxed{z_0 = -\dfrac{b}{2a}}$
- Si $\Delta \neq 0$, (E) a deux solutions distinctes :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}}$$

où δ est *une* racine carrée de Δ.

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

Théorème 1

- Si $\Delta = 0$, (E) a une solution unique : $\boxed{z_0 = -\dfrac{b}{2a}}$
- Si $\Delta \neq 0$, (E) a deux solutions distinctes :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}}$$

où δ est *une* racine carrée de Δ.

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

Théorème 1

- Si $\Delta = 0$, (E) a une solution unique : $\boxed{z_0 = -\dfrac{b}{2a}}$
- Si $\Delta \neq 0$, (E) a deux solutions distinctes :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}}$$

où δ est *une* racine carrée de Δ.

Exercice 1

Démontrer le théorème.

2 Equation du second degré à coefficients complexes

On pose
$\Delta = b^2 - 4ac$

Cadre

On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$

Théorème 1

- Si $\Delta = 0$, (E) a une solution unique : $\boxed{z_0 = -\dfrac{b}{2a}}$
- Si $\Delta \neq 0$, (E) a deux solutions distinctes :

$$\boxed{z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}}$$

où δ est *une* racine carrée de Δ.

Exemple 2

Résoudre l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

2 Equation du second degré à coefficients complexes

Cas particulier où le discriminant est réel

- si $\Delta \geq 0$: $\boxed{z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$

2 Equation du second degré à coefficients complexes

On prend : $\delta = \sqrt{\Delta}$

Cas particulier où le discriminant est réel

- si $\Delta \geq 0$: $$\boxed{z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

2 Equation du second degré à coefficients complexes

On prend : $\delta = \sqrt{\Delta}$

Cas particulier où le discriminant est réel

- si $\Delta \geq 0$: $\boxed{z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$
- si $\Delta < 0$: $\boxed{z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

2 Equation du second degré à coefficients complexes

On prend : $\delta = \sqrt{\Delta}$

Cas particulier où le discriminant est réel

- si $\Delta \geq 0$: $\boxed{z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$
- si $\Delta < 0$: $\boxed{z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$

On prend : $\delta = i\sqrt{-\Delta}$

Remarque

Les deux racines de (E) vérifient :

-
-

3 Somme et produit des racines

Remarque

Les deux racines de (E) vérifient :

- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$
-

3 Somme et produit des racines

Remarque

Les deux racines de (E) vérifient :

- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

3 Somme et produit des racines

Remarque

Les deux racines de (E) vérifient :
- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

Théorème 2

Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont :

3 Somme et produit des racines

Remarque

Les deux racines de (E) vérifient :

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

Théorème 2

Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont : les racines de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

3 Somme et produit des racines

Remarque

Les deux racines de (E) vérifient :

- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

Théorème 2

Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont : les racines de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

Exercice 2

Démontrer le théorème.

3 Somme et produit des racines

Remarque

Les deux racines de (E) vérifient :

- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

Théorème 2

Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont : les racines de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

SF 16 : Résoudre un système « somme-produit »

Exemple 3

Résoudre le système d'inconnue $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 6i \\ z_1 z_2 = -13 \end{cases}$.

3 Somme et produit des racines

Remarque

Les deux racines de (E) vérifient :

- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

Théorème 2

Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont : les racines de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

Exemple 4

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$

b) $z^2 - (1 + a + a^2)z + a(1 + a^2) = 0$

4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

Cadre

- P est la fonction polynomiale : $\quad z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P : $\quad P(\alpha) = 0$

4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

Cadre

- P est la fonction polynomiale : $z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P : $P(\alpha) = 0$

Théorème 3

Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

Cadre

- P est la fonction polynomiale : $z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P : $P(\alpha) = 0$

Théorème 3

Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

Cadre

- P est la fonction polynomiale : $z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P : $P(\alpha) = 0$

Théorème 3

Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

Exercice 3

Démontrer le théorème

4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

Cadre

- P est la fonction polynomiale : $z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P : $P(\alpha) = 0$

Théorème 3

Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

Exercice 4

On suppose que les a_k sont tous réels. Montrer que $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

4 Factorisation des polynômes : deux petits résultats

Cadre

- P est la fonction polynomiale : $\quad z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$
- $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P : $\quad P(\alpha) = 0$

Théorème 3

Il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

Exemple 5

Montrer que $P : z \mapsto (1 + z)^7 - z^7 - 1$ est divisible par $z^2 + z + 1$.

III Interprétation géométrique des complexes

1 Orthogonalité, alignement

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| =$
- $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv$

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$
- $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv$

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$
- $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$.

1 Orthogonalité, alignement

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$
- $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$.

i) A, B et M sont alignés ssi :

ii) (MA) et (MB) sont perpendiculaires ssi :

1 Orthogonalité, alignement

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$
- $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$.

i) A, B et M sont alignés ssi : $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$

ii) (MA) et (MB) sont perpendiculaires ssi :

1 Orthogonalité, alignement

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$
- $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$.

i) $\boxed{A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés ssi : } \dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}}$

ii) $\boxed{(MA) \text{ et } (MB) \text{ sont perpendiculaires ssi : } \dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}}$

1 Orthogonalité, alignement

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$
- $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$.

i) $\boxed{A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés ssi : } \dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}}$

ii) $\boxed{(MA) \text{ et } (MB) \text{ sont perpendiculaires ssi : } \dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}}$

Exercice 1

Démontrer le théorème.

1 Orthogonalité, alignement

Théorème 1 : Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$

Soient A, B, M d'affixes a, b, z tels que $M \notin \{A, B\}$:

- $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = \dfrac{MB}{MA}$
- $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$.

i) $\boxed{A,\ B \text{ et } M \text{ sont alignés ssi : } \dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}}$

ii) $\boxed{(MA) \text{ et } (MB) \text{ sont perpendiculaires ssi : } \dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}}$

Exemple 1

Trouver les $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ tels que z, z^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en z.

Définition 1

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application

Translations, homothéties, rotations

Définition 1

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.

Translations, homothéties, rotations

Définition 1

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application

Translations, homothéties, rotations

Définition 1

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application

  $$h : z \mapsto z' \quad \text{où} \quad z' - \omega = \lambda(z - \omega)$$

Translations, homothéties, rotations

Définition 1

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application

$$h : z \mapsto z' \quad \text{où} \quad z' - \omega = \lambda(z - \omega) \quad \textit{i.e.} \quad h : z \mapsto \omega + \lambda(z - \omega)$$

Translations, homothéties, rotations

Définition 1

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application

$$h : z \mapsto z' \quad \text{où} \quad z' - \omega = \lambda(z - \omega) \quad \textit{i.e.} \quad h : z \mapsto \omega + \lambda(z - \omega)$$

- La rotation de centre ω et d'angle θ est l'application

Translations, homothéties, rotations

Définition 1

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application

  $$h : z \mapsto z' \quad \text{où} \quad z' - \omega = \lambda(z - \omega) \quad \textit{i.e.} \quad h : z \mapsto \omega + \lambda(z - \omega)$$

- La rotation de centre ω et d'angle θ est l'application

  $$r : z \mapsto z' \quad \text{où} \quad z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Définition 1

Soient $b, \omega \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- La translation de vecteur b est l'application $t : z \mapsto z + b$.
- L'homothétie de centre ω et de rapport λ est l'application

$$h : z \mapsto z' \quad \text{où} \quad z' - \omega = \lambda(z - \omega) \quad \textit{i.e.} \quad h : z \mapsto \omega + \lambda(z - \omega)$$

- La rotation de centre ω et d'angle θ est l'application

$$r : z \mapsto z' \quad \text{où} \quad z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \quad \textit{i.e.} \quad r : z \mapsto \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$

Définition 2

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

Similitudes directes

Définition 2

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $z \mapsto az + b, \quad$ pour certains $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Similitudes directes

Définition 2

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $z \mapsto az + b, \quad$ pour certains $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

Similitudes directes

Définition 2

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $z \mapsto az + b$, pour certains $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

  i) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

Similitudes directes

Définition 2

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $z \mapsto az + b, \quad$ pour certains $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

  i) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

  ii) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ est donné par : $\quad z' - \omega = a(z - \omega)$

Similitudes directes

Définition 2

On appelle similitude directe toute application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme : $z \mapsto az + b, \quad$ pour certains $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

 i) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

 ii) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ est donné par : $\quad z' - \omega = a(z - \omega)$

Exercice 2

Démontrer les points *i)* et *ii)* du théorème.

Similitudes directes

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

  i) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

  ii) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ est donné par : $\quad z' - \omega = a(z - \omega)$

Remarque

En écrivant $a = \rho e^{i\theta}$: $\quad z' - \omega = \rho e^{i\theta}(z - \omega)$

Similitudes directes

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

i) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

ii) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ est donné par : $z' - \omega = a(z - \omega)$

Remarque

d'abord rotation

En écrivant $a = \rho e^{i\theta}$: $z' - \omega = \rho\, e^{i\theta}(z - \omega)$

Similitudes directes

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

  i) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

  ii) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ est donné par : $\quad z' - \omega = a(z - \omega)$

Remarque

d'abord rotation

En écrivant $a = \rho e^{i\theta}$: $\quad z' - \omega = \rho \ \ e^{i\theta}(z - \omega)$

puis homothétie

Similitudes directes

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

  i) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

  ii) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ est donné par : $z' - \omega = a(z - \omega)$

Remarque

En écrivant $a = \rho e^{i\theta}$: $z' - \omega = \underbrace{\rho \; \overbrace{e^{i\theta}(z-\omega)}^{\text{d'abord rotation}}}_{\text{puis homothétie}} = \underbrace{e^{i\theta}\rho(z-\omega)}_{\text{homothétie puis rotation}}$

Similitudes directes

Théorème 2

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur b.
- Si $a \neq 1$, alors :

  i) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

  ii) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ est donné par : $\quad z' - \omega = a(z - \omega)$

Remarque

d'abord rotation

En écrivant $a = \rho e^{i\theta}$: $\quad z' - \omega = \rho \; e^{i\theta}(z - \omega) = e^{i\theta}\rho(z - \omega)$

puis homothétie

homothétie puis rotation

Exemple 2

Caractériser géométriquement la similitude $z \mapsto 2iz + 2 + i$.