Fonctions usuelles

Chapitre 4

I Fonction exponentielle, logarithme et puissances

2 Fonctions puissances

Objectif

Définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nécessairement entier.

2 Fonctions puissances

Objectif

Définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nécessairement entier.

Remarque

Lorsque $n \in \mathbb{N}$: $\quad x^n =$

2 Fonctions puissances

Objectif

Définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nécessairement entier.

Remarque

Lorsque $n \in \mathbb{N}$: $\quad x^n = e^{n \ln x}$

2 Fonctions puissances

Objectif

Définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nécessairement entier.

Remarque

Lorsque $n \in \mathbb{N}$: $x^n = e^{n \ln x}$

Encore défini
pour $x > 0$ non entier

2 Fonctions puissances

Objectif

Définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nécessairement entier.

Remarque

Lorsque $n \in \mathbb{N}$: $x^n = e^{n \ln x}$

Encore défini pour $x > 0$ non entier

Définition 1

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

2 Fonctions puissances

Objectif

Définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nécessairement entier.

Remarque

Lorsque $n \in \mathbb{N}$: $x^n = e^{n \ln x}$

Encore défini pour $x > 0$ non entier

Définition 1

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $x^\alpha \underset{\text{déf.}}{=} e^{\alpha \ln x}$.

2 Fonctions puissances

Objectif

Définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nécessairement entier.

Remarque

Lorsque $n \in \mathbb{N}$: $x^n = e^{n \ln x}$

Encore défini pour $x > 0$ non entier

Définition 1

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $x^\alpha \underset{\text{déf.}}{=} e^{\alpha \ln x}$.

Attention

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas :

Objectif

Définir x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$ non nécessairement entier.

Remarque

Lorsque $n \in \mathbb{N}$: $x^n = e^{n \ln x}$

Encore défini pour $x > 0$ non entier

Définition 1

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose : $x^\alpha \underset{\text{déf.}}{=} e^{\alpha \ln x}$.

☢ Attention ☢

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

2 Fonctions puissances

☢ Attention ☢

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

-
-
-
-
-

2 Fonctions puissances

Attention

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
-
-
-
-

2 Fonctions puissances

☢ Attention ☢

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
-
-
-

2 Fonctions puissances

☢ Attention ☢

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
-
-

2 Fonctions puissances

☢ Attention ☢

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
-

2 Fonctions puissances

☢ **Attention** ☢

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$

2 Fonctions puissances

☢ Attention ☢

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$

Conséquence

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (x^{1/n})^n = x.$

Le réel $x^{1/n}$ est appelé :

2 Fonctions puissances

☢ Attention ☢

Lorsque α n'est pas un entier, x^α n'est pas : $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\text{« } \alpha \text{ fois »}}$

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$

Conséquence

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(x^{1/n})^n = x$.

Le réel $x^{1/n}$ est appelé : la racine n-ième de x, aussi noté $\sqrt[n]{x}$

2 Fonctions puissances

Théorème 1

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$

Conséquence

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (x^{1/n})^n = x.$

Le réel $x^{1/n}$ est appelé : la racine n-ième de x, aussi noté $\sqrt[n]{x}$

Exercice 1

Démontrer les cinq propriétés du théorème.

2 Fonctions puissances

Théorème 2 : Dérivée

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée :

Théorème 2 : Dérivée

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $\quad p_\alpha{}' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Théorème 2 : Dérivée

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $\quad {p_\alpha}' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Conséquence

Si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors u^α est dérivable et : $\quad (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$

Théorème 2 : Dérivée

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $\quad {p_\alpha}' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Conséquence

Si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors u^α est dérivable et : $\quad (u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$

Exercice 2

Justifier la dérivabilité de p_α ainsi que l'expression de sa dérivée.

2 Fonctions puissances

Théorème 2 : Dérivée

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $p_\alpha{}' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Conséquence

Si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors u^α est dérivable et : $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$

Exemple 1

1. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^x$.
2. Si $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable, calculer la dérivée de $g : x \mapsto x^{u(x)}$.

2 Fonctions puissances

Théorème 3 : Variations des fonctions puissances

- Cas $\alpha > 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	
x^{α}	

- Cas $\alpha < 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	
x^{α}	

2 Fonctions puissances

Théorème 3 : Variations des fonctions puissances

- Cas $\alpha > 0$

x	0	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$	$+$	
x^{α}		

- Cas $\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		
x^{α}		

Théorème 3 : Variations des fonctions puissances

- Cas $\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		$+$	
x^α	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Cas $\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$			
x^α			

Théorème 3 : Variations des fonctions puissances

- Cas $\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		$+$	
x^{α}	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Cas $\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		$-$	
x^{α}	$\Vert +\infty$	$\searrow$	0

2 Fonctions puissances

Théorème 3 : Variations des fonctions puissances

- Cas $\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		$+$	
x^{α}	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Cas $\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
$\alpha x^{\alpha-1}$		$-$	
x^{α}	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$. On prolonge p_α en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$. Montrer que la fonction p_α est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \geq 1$.

2 Fonctions puissances

Théorème 4 : croissances comparées généralisées

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

-
-
-

Théorème 4 : croissances comparées généralisées

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

- $\dfrac{e^x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
-
-

2 Fonctions puissances

Théorème 4 : croissances comparées généralisées

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

- $\dfrac{e^x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
-

Théorème 4 : croissances comparées généralisées

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

- $\dfrac{e^x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- $x^\alpha |\ln x|^\beta \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

2 Fonctions puissances

Théorème 4 : croissances comparées généralisées

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

- $\dfrac{e^x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- $x^\alpha |\ln x|^\beta \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Exercice 4

Etablir la deuxième limite en utilisant : $\displaystyle \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0.$

II Fonctions hyperboliques

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, notées ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, notées ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, notées ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.*

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, notées ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, notées ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et :

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, notées ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, notées ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
3. *Limites.*

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 1

On appelle *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, notées ch et sh les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
3. *Limites.* $\operatorname{ch} x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.
3. *Limites.* $\mathrm{ch}\, x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{sh}\, x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
4. Leurs variations sont données par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{ch}\, x$			
sh			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{sh}\, x$			
ch			

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
3. *Limites.* $\operatorname{ch} x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\operatorname{sh} x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
4. Leurs variations sont données par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$		$+$	
sh			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh} x$			
ch			

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.
3. *Limites.* $\mathrm{ch}\, x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{sh}\, x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
4. Leurs variations sont données par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{ch}\, x$		$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{sh}\, x$			
ch			

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
3. *Limites.* $\operatorname{ch} x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\operatorname{sh} x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
4. Leurs variations sont données par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$		$+$	
sh	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh} x$			
ch			

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
3. *Limites.* $\operatorname{ch} x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\operatorname{sh} x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
4. Leurs variations sont données par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$		$+$	
sh	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{sh} x$	$-$	0	$+$
ch			

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
3. *Limites.* $\operatorname{ch} x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\operatorname{sh} x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
4. Leurs variations sont données par :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch} x$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh} x$	$-$		0		$+$
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Théorème 1 : Propriétés des fonctions sh et ch

1. *Parité.* ch est paire, sh est impaire.
2. *Dérivées.* sh et ch sont dérivables et : $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.
3. *Limites.* $\mathrm{ch}\, x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{sh}\, x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
4. Leurs variations sont données par :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{ch}\, x$		$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{sh}\, x$	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x \geq 1$

Théorème 2

Pour tout réel x :

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Théorème 2

Pour tout réel x :

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

1 Cosinus et sinus hyperboliques

Théorème 2

Pour tout réel x :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Exercice 1

Démontrer le théorème précédent.

Théorème 2

Pour tout réel x :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

SF 2 : Equation avec des fonctions hyperboliques

Exemple 1

Résoudre l'équation : $\operatorname{sh} x = \sqrt{3}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2 Tangente hyperbolique

Définition 2

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction définie par :

- $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

2 Tangente hyperbolique

Définition 2

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction définie par :

- $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{th}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2 Tangente hyperbolique

Définition 2

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction définie par :

- $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{th}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

2 Tangente hyperbolique

Définition 2

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction définie par :

- $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Théorème 3 : Propriétés de th

1. *Parité.*
2. *Dérivée.* th est dérivable et :
3. *Limites.*

2 Tangente hyperbolique

Définition 2

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction définie par :

- $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{th}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Théorème 3 : Propriétés de th

1. *Parité.* th est impaire
2. *Dérivée.* th est dérivable et :
3. *Limites.*

2 Tangente hyperbolique

Définition 2

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction définie par :

- $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Théorème 3 : Propriétés de th

1. *Parité.* th est impaire
2. *Dérivée.* th est dérivable et : $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.
3. *Limites.*

2 Tangente hyperbolique

Définition 2

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction définie par :

- $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Théorème 3 : Propriétés de th

1. *Parité.* th est impaire
2. *Dérivée.* th est dérivable et : $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.
3. *Limites.* $\operatorname{th} x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm 1$.

2 Tangente hyperbolique

Définition 2

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction définie par :

- $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Théorème 3 : Propriétés de th

1. *Parité.* th est impaire
2. *Dérivée.* th est dérivable et : $\operatorname{th}' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.
3. *Limites.* $\operatorname{th} x \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm 1$.
4. Ses variations sont données par :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

III Fonction réciproque

1 Notion de bijection

Cadre

- I, J sont des intervalles
- $f : I \to J$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans J

1 Notion de bijection

Cadre

- I, J sont des intervalles
- $f : I \to J$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans J

Définition 1

On dit que f est *bijective de I sur J* ou que f est *une bijection de I sur J* si :

1 Notion de bijection

Cadre

- I, J sont des intervalles
- $f : I \to J$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans J

Définition 1

On dit que f est *bijective de I sur J* ou que f est *une bijection de I sur J* si : tout $y \in J$ possède un unique antécédent par f

1 Notion de bijection

Cadre

- I, J sont des intervalles
- $f : I \to J$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans J

Définition 1

On dit que f est *bijective de I sur J* ou que f est *une bijection de I sur J* si : tout $y \in J$ possède un unique antécédent par f

Notation

Dans ce cas, on note f^{-1} la fonction de J dans I qui à $y \in J$ associe son antécédent par f.

1 Notion de bijection

Cadre

- I, J sont des intervalles
- $f : I \to J$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans J

Définition 1

On dit que f est *bijective de I sur J* ou que f est *une bijection de I sur J* si : tout $y \in J$ possède un unique antécédent par f

fonction réciproque de f

Notation

Dans ce cas, on note f^{-1} la fonction de J dans I qui à $y \in J$ associe son antécédent par f.

1 Notion de bijection

Cadre

- I, J sont des intervalles
- $f : I \to J$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans J

Définition 1

On dit que f est *bijective de I sur J* ou que f est *une bijection de I sur J* si : tout $y \in J$ possède un unique antécédent par f

Notation

fonction réciproque de f

Dans ce cas, on note f^{-1} la fonction de J dans I qui à $y \in J$ associe son antécédent par f.

Graphiquement

Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

2 Le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone

Cadre

$I = [a\,, b[$ (par exemple)

Théorème 1 : TVI strictement monotone

Si :

Alors :

2 Le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone

Cadre

$I = [a\,,b[$ (par exemple)

Théorème 1 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,,b[$

Alors :

2 Le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone

Cadre

$I = [a\,, b[$ (par exemple)

Théorème 1 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,, b[$

ii) f est strictement croissante sur I

Alors :

2 Le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone

Cadre

$I = [a\,, b[$ (par exemple)

Théorème 1 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,, b[$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $f(a) = \alpha$ et $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors :

Cadre

$I = [a\,, b[$ (par exemple)

Théorème 1 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,, b[$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $f(a) = \alpha$ et $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors : f est bijective de $[a\,, b[$ sur $[\alpha\,, \ell[$.

Cadre

$I = [a\,,b[$ (par exemple)

Théorème 1 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,,b[$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $f(a) = \alpha$ et $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors : f est bijective de $[a\,,b[$ sur $[\alpha\,,\ell[$.

A adapter si f est décroissante
ou si $I =]a\,,b]$

2 Le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone

Cadre

$I = [a\,,b[$ (par exemple)

Théorème 1 : TVI strictement monotone

Si :

i) f est continue sur $I = [a\,,b[$

ii) f est strictement croissante sur I

iii) *Aux bornes :* $f(a) = \alpha \quad$ et $\quad f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)

Alors : f est bijective de $[a\,,b[$ sur $[\alpha\,,\ell[$.

Exemple 2

Montrer que $f : x \mapsto xe^x$ est bijective de $[-1\,,+\infty[$ sur $[-e^{-1}\,,+\infty[$.

3 Calcul de $f^{-1}(y)$

En pratique : pour calculer $f^{-1}(y)$

Pour $y \in J$ fixé, on résout l'équation : $\quad f(x) = y \quad$ d'inconnue $x \in I$

Exemple 3

Montrer que $f : x \mapsto 10^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de f^{-1}.

Dérivée d'une réciproque

Théorème 2 : Admis provisoirement

Si :

Alors :

Dérivée d'une réciproque

Théorème 2 : Admis provisoirement

Si :

- f est bijective de I sur J.

Alors :

Dérivée d'une réciproque

Théorème 2 : Admis provisoirement

Si :

- f est bijective de I sur J.
- f est dérivable sur I

Alors :

Dérivée d'une réciproque

Théorème 2 : Admis provisoirement

Si :

- f est bijective de I sur J.
- f est dérivable sur I
- $\boxed{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$

Alors :

Dérivée d'une réciproque

Théorème 2 : Admis provisoirement

Si :

- f est bijective de I sur J.
- f est dérivable sur I
- $\boxed{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$

Alors : f^{-1} est dérivable sur J et :

Dérivée d'une réciproque

Théorème 2 : Admis provisoirement

Si :

- f est bijective de I sur J.
- f est dérivable sur I
- $\boxed{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$

Alors : f^{-1} est dérivable sur J et : $\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

Dérivée d'une réciproque

Théorème 2 : Admis provisoirement

Si :

- f est bijective de I sur J.
- f est dérivable sur I
- $\boxed{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$

Alors : f^{-1} est dérivable sur J et : $\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

Exemple 4

On note W la réciproque de la fonction $x \mapsto xe^x$ étudiée à l'exemple 2. Montrer que W est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et que pour tout $x > -e^{-1}$: $W'(x) = \dfrac{W(x)}{x(1+W(x))}$.

IV Fonctions circulaires réciproques

Arc sinus

Exercice 1

Montrer que sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1\,,1]$.

Arc sinus

Exercice 1

Montrer que sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 1

Arcsin est la fonction réciproque de la restriction de sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Arc sinus

Exercice 1

Montrer que sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

L'application $f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta \end{array}$

Définition 1

Arcsin est la fonction réciproque de la restriction de sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Arc sinus

Exercice 1

Montrer que sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

L'application $f: \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta \end{array}$

Définition 1

Arcsin est la fonction réciproque de la restriction de sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ revient à trouver θ tel que :

-
-

Arc sinus

Exercice 1

Montrer que sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

L'application $f: \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta \end{array}$

Définition 1

Arcsin est la fonction réciproque de la restriction de sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ revient à trouver θ tel que :

-
- $\sin\theta = x$.

Arc sinus

Exercice 1

Montrer que sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

L'application $f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta \end{array}$

Définition 1

Arcsin est la fonction réciproque de la restriction de sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ revient à trouver θ tel que :

- $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\sin\theta = x$.

Arc sinus

Exercice 1

Montrer que sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

L'application $f : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ \theta & \longmapsto & \sin\theta \end{array}$

Définition 1

Arcsin est la fonction réciproque de la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ revient à trouver θ tel que :

- $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\sin\theta = x$.

Exemple 1

Calculer : $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}$, $\operatorname{Arcsin} 1$, $\operatorname{Arcsin} 0$ et $\operatorname{Arcsin}\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Arc sinus

Conséquences

- Pour tout $x \in$, $\quad \sin(\operatorname{Arcsin} x) =$

Arc sinus

Conséquences

- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\quad \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$.

Arc sinus

Conséquences

- Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\quad \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$.
- Pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$, $\quad \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta$

Arc sinus

Conséquences

- Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\quad \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x.$
- Pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$, $\quad \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta$

☢ C'est faux si $\theta \notin [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$ ☢

Arc sinus

Conséquences

- Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$.
- Pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta$

☢ C'est faux si $\theta \notin [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$ ☢

Exemple 2

Calculer : $\operatorname{Arcsin}\sin\frac{2\pi}{3}$ et $\operatorname{Arcsin}\sin\frac{20\pi}{3}$

Théorème 1

- Sur $[-1\,,1]$, Arcsin est :

Arc sinus

Théorème 1

- Sur $[-1\,,1]$, Arcsin est :
  - continue

Arc sinus

Théorème 1

- Sur $[-1\,,1]$, Arcsin est :
  - continue
  - strictement croissante

Arc sinus

Théorème 1

- Sur $[-1\,,1]$, Arcsin est :
  - continue
  - strictement croissante
- Arcsin est dérivable sur $]-1\,,1[$ et pour tout $x \in \,]-1\,,1[$:

Arc sinus

Théorème 1

- Sur $[-1\,,1]$, Arcsin est :
  - continue
  - strictement croissante
- Arcsin est dérivable sur $]-1\,,1[$ et pour tout $x \in\,]-1\,,1[$:

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Arc cosinus

Exercice 2

Montrer que cosinus réalise une bijection de $[0\,,\pi]$ sur $[-1\,,1]$.

Arc cosinus

Exercice 2

Montrer que cosinus réalise une bijection de $[0\,,\pi]$ sur $[-1\,,1]$.

Définition 2

Arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0\,,\pi]$

Arc cosinus

Exercice 2

Montrer que cosinus réalise une bijection de $[0\,,\pi]$ sur $[-1\,,1]$.

Définition 2

Arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0\,,\pi]$

Arc cosinus

Exercice 2

Montrer que cosinus réalise une bijection de $[0\,,\pi]$ sur $[-1\,,1]$.

Définition 2

Arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0\,,\pi]$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arccos} x$ revient à trouver θ tel que :

-
-

Arc cosinus

Exercice 2

Montrer que cosinus réalise une bijection de $[0\,,\pi]$ sur $[-1\,,1]$.

Définition 2

Arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0\,,\pi]$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arccos} x$ revient à trouver θ tel que :

- $\theta \in [0\,,\pi]$
- $\cos\theta = x$.

Arc cosinus

Exercice 2

Montrer que cosinus réalise une bijection de $[0\,,\pi]$ sur $[-1\,,1]$.

Définition 2

Arccos est la fonction réciproque de la restriction de cos à $[0\,,\pi]$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arccos} x$ revient à trouver θ tel que :

- $\theta \in [0\,,\pi]$
- $\cos\theta = x$.

Exemple 3

Calculer : $\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}$, $\operatorname{Arccos} 1$, $\operatorname{Arccos} 0$ et $\operatorname{Arccos}\frac{-1}{2}$.

Arc cosinus

Conséquences

- Pour tout $x \in$, $\cos(\operatorname{Arccos} x) =$

Arc cosinus

Conséquences

- Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\quad \cos(\operatorname{Arccos} x) = x.$

Arc cosinus

Conséquences

- Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\quad \cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.
- Pour tout $\theta \in [0\,,\pi]$, $\quad \operatorname{Arccos}(\cos\theta) = \theta$

Arc cosinus

Conséquences

- Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.
- Pour tout $\theta \in [0\,,\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos\theta) = \theta$

☢ C'est faux si $\theta \notin [0\,,\pi]$ ☢

Conséquences

- Pour tout $x \in [-1\,,1]$, $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$.
- Pour tout $\theta \in [0\,,\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos\theta) = \theta$

C'est faux si $\theta \notin [0\,,\pi]$

Exemple 4

1. Calculer $\operatorname{Arccos}\cos -\frac{\pi}{3}$ et $\operatorname{Arccos}\cos\frac{20\pi}{3}$.
2. Simplifier $\operatorname{Arccos}\cos\theta$ pour $\theta \in [\pi\,,2\pi]$.

Arc cosinus

Théorème 2

- Sur $[-1\,,1]$, Arccos est :

Arc cosinus

Théorème 2

- Sur $[-1\,,1]$, Arccos est :
  - continue

Arc cosinus

Théorème 2

- Sur $[-1\,,1]$, Arccos est :
  - continue
  - strictement décroissante

Théorème 2

- Sur $[-1\,,1]$, Arccos est :
  - continue
  - strictement décroissante
- Arccos est dérivable sur $]-1\,,1[$ et pour tout $x \in\ ]-1\,,1[$:

Théorème 2

- Sur $[-1\,,1]$, Arccos est :
  - continue
  - strictement décroissante
- Arccos est dérivable sur $]-1\,,1[$ et pour tout $x \in \,]-1\,,1[$:

$$\boxed{\mathrm{Arccos}'(x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Propriétés

Théorème 3

Pour tout $x \in [-1\,,1]$: $\quad \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sin(\operatorname{Arccos} x) =$

Propriétés

Théorème 3

Pour tout $x \in [-1\,,1]$: $\quad \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$

Propriétés

Théorème 3

Pour tout $x \in [-1\,,1]$: $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$

Exercice 3

Etablir l'égalité pour $\cos(\operatorname{Arcsin} x)$.

Propriétés

Théorème 3

Pour tout $x \in [-1\,,1]$: $\quad \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$

Exercice 4

Démontrer le résultat portant sur la dérivée de Arcsin.

SF 5 : Etablir une égalité du type : « $\forall x \in I, \quad f(x) = k$ »

Exemple 5

Montrer que pour tout $x \in [-1\,,1]$: $$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

Propriétés

SF 5 : Etablir une égalité du type : « $\forall x \in I, \quad f(x) = k$ »

Exemple 5

Montrer que pour tout $x \in [-1\,,1]$: $\qquad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \dfrac{\pi}{2}$

SF 7 : Résoudre une équation avec Arccos, Arcsin

Exemple 6

Résoudre l'équation d'inconnue x : $\qquad \operatorname{Arccos} x = 2 \operatorname{Arcsin} x.$

2 Fonction Arc tangente

Exercice 1

Montrer que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

2 Fonction Arc tangente

Exercice 1

Montrer que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 1

Arctan est la fonction réciproque de la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2 Fonction Arc tangente

Exercice 1

Montrer que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 1

Arctan est la fonction réciproque de la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

2 Fonction Arc tangente

Exercice 1

Montrer que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 1

Arctan est la fonction réciproque de la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arctan} x$ revient à trouver θ tel que :

- $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\tan\theta = x$.

2 Fonction Arc tangente

Exercice 1

Montrer que tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 1

Arctan est la fonction réciproque de la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

En pratique

Calculer $\theta = \operatorname{Arctan} x$ revient à trouver θ tel que :

- $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\tan\theta = x$.

Exemple 1

Calculer : $\operatorname{Arctan} 1$, $\operatorname{Arctan}\sqrt{3}$, $\operatorname{Arctan} 0$ et $\operatorname{Arctan}\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

Conséquences

- Pour tout $x \in \quad , \quad \tan(\operatorname{Arctan} x) =$

2 Fonction Arc tangente

Conséquences

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.

2 Fonction Arc tangente

Conséquences

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.
- Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\quad \operatorname{Arctan}(\tan\theta) = \theta$

Conséquences

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.
- Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan}(\tan\theta) = \theta$

☢ C'est faux si $\theta \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ☢

Conséquences

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x$.
- Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\quad \operatorname{Arctan}(\tan\theta) = \theta$

☢ C'est faux si $\theta \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ☢

Exemple 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$.
Montrer qu'une forme trigonométrique de z est :

- Si $x > 0$: $\quad z = \sqrt{x^2+y^2}\, e^{i \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}}$
- Si $x < 0$: $\quad z = \sqrt{x^2+y^2}\, e^{i(\pi + \operatorname{Arctan} \frac{y}{x})}$

Propriétés de Arctan

Théorème 1

Sur $\mathbb{R}$, Arctan est :

Propriétés de Arctan

Théorème 1

Sur $\mathbb{R}$, Arctan est :

- continue
- strictement croissante

Propriétés de Arctan

Théorème 1

Sur $\mathbb{R}$, Arctan est :

- continue
- strictement croissante

Théorème 2

Arctan est impaire

Propriétés de Arctan

Théorème 1

Sur $\mathbb{R}$, Arctan est :

- continue
- strictement croissante

Théorème 2

Arctan est impaire

Exercice 2

Prouver l'imparité de Arctan.

Propriétés de Arctan

Théorème 3

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

Propriétés de Arctan

Théorème 3

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Propriétés de Arctan

Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable
$$(\operatorname{Arctan} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Théorème 3

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Propriétés de Arctan

Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable
$$(\text{Arctan}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Théorème 3

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Exercice 3

Démontrer le théorème en utilisant la formule de dérivation des fonctions réciproques.

Propriétés de Arctan

Théorème 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} =$

Propriétés de Arctan

Théorème 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Théorème 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 4

Démontrer le théorème en s'inspirant de la preuve de :

$$\forall x \in [-1\,,1], \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

Théorème 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

SF 7 : Résoudre une équation avec Arctan

Exemple 3

Résoudre l'équation d'inconnue x : $$\operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} 3x = \frac{\pi}{4}.$$