Nombres complexes

Niveau 1

Chapitre 3

I Rappels sur l'ensemble $\mathbb{C}$

I Rappels sur l'ensemble $\mathbb{C}$

II Exponentielle imaginaire

III Forme trigonométrique

1 Structure de $\mathbb{C}$

i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et on peut étendre aux nombres complexes l'addition et la multiplication des réels ;

ii) $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que : $\quad i^2 = -1$;

iii) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous *forme algébrique* :
$z = x + iy$, $\quad$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1 Structure de $\mathbb{C}$

i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et on peut étendre aux nombres complexes l'addition et la multiplication des réels ;

ii) $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que : $\quad i^2 = -1$;

iii) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous *forme algébrique* :
$z = x + iy \ , \quad$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

Remarque

- z est réel ssi :
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que :

1 Structure de $\mathbb{C}$

i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et on peut étendre aux nombres complexes l'addition et la multiplication des réels ;

ii) $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que : $i^2 = -1$;

iii) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous *forme algébrique* :
$z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

Remarque

- z est réel ssi : $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que :

1 Structure de $\mathbb{C}$

i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et on peut étendre aux nombres complexes l'addition et la multiplication des réels ;

ii) $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que : $\quad i^2 = -1$;

iii) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous *forme algébrique* :
$z = x + iy$, $\quad$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

Remarque

- z est réel ssi : $\text{Im}(z) = 0$.
- Lorsque $\text{Re}(z) = 0$ on dit que : z est imaginaire pur.

1 Structure de $\mathbb{C}$

i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et on peut étendre aux nombres complexes l'addition et la multiplication des réels ;

ii) $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que : $\quad i^2 = -1$;

iii) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous *forme algébrique* :
$z = x + iy$, $\quad$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

Remarque

- z est réel ssi : $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que : z est imaginaire pur.
  On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

1 Structure de $\mathbb{C}$

i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et on peut étendre aux nombres complexes l'addition et la multiplication des réels ;

ii) $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que : $\quad i^2 = -1$;

iii) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous *forme algébrique* :
$z = x + iy$, $\quad$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

Remarque

- z est réel ssi : $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que : z est imaginaire pur.
  On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

☢ **Attention** ☢ En général :

1 Structure de $\mathbb{C}$

i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et on peut étendre aux nombres complexes l'addition et la multiplication des réels ;

ii) $\mathbb{C}$ possède un élément i tel que : $\quad i^2 = -1$;

iii) Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous *forme algébrique* :
$z = x + iy$, $\quad$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

Remarque

- z est réel ssi : $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit que : z est imaginaire pur.
  On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

☢ **Attention** ☢ En général :

$$\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Im}(z')$$

Représentation géométrique des complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Tout complexe $z = x + iy$ peut être identifié :

Représentation géométrique des complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Tout complexe $z = x + iy$ peut être identifié :

- Au point $M(x, y)$ on dit que z est l'affixe de M

Représentation géométrique des complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Tout complexe $z = x + iy$ peut être identifié :

- Au point $M(x, y)$ on dit que z est l'affixe de M
- Au vecteur $\vec{u}(x, y)$ on dit que z est l'affixe de $\vec{u}$

Représentation géométrique des complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Tout complexe $z = x + iy$ peut être identifié :

- Au point $M(x, y)$ on dit que z est l'affixe de M
- Au vecteur $\vec{u}(x, y)$ on dit que z est l'affixe de $\vec{u}$

Rappel

Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A et si $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

Représentation géométrique des complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Tout complexe $z = x + iy$ peut être identifié :

- Au point $M(x, y)$ on dit que z est l'affixe de M
- Au vecteur $\vec{u}(x, y)$ on dit que z est l'affixe de $\vec{u}$

Rappel

Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A et si $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $b - a$.

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\bar{z} = x - iy$.

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\bar{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

-
-
-

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
-
-

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
-

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $\overline{(\overline{z})} = z$

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $\overline{(\overline{z})} = z$

Théorème 2 : Règles de calculs pour manipuler des conjugués

-
-
-

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $\overline{(\overline{z})} = z$

Théorème 2 : Règles de calculs pour manipuler des conjugués

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
-
-

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $\overline{(\overline{z})} = z$

Théorème 2 : Règles de calculs pour manipuler des conjugués

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
-

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $\overline{(\overline{z})} = z$

Théorème 2 : Règles de calculs pour manipuler des conjugués

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Si $z \neq 0$: $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Conjugaison

Définition 1

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le *conjugué* de z est le complexe : $\overline{z} = x - iy$.

Théorème 1 : Propriétés du conjugué

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $\overline{(\overline{z})} = z$

Théorème 2 : Règles de calculs pour manipuler des conjugués

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Si $z \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Exemple 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{\overline{z} - iz}{i - 1}$ est réel.

4 Module

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- Le *module* de z est :$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. ▪ Retenir :

4 Module

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- Le *module* de z est : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Retenir : $\boxed{|z|^2 = z\bar{z}}$

4 Module

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- Le *module* de z est : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. - Retenir : $\boxed{|z|^2 = z\bar{z}}$

Exemple 2

Mettre sous forme algébrique le complexe : $z = \dfrac{3+6i}{3-4i}$.

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
-
-
-

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
-
-

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
-
-

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
-

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1.

2.

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
2.

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
2. $|z - z'| \geq |z| - |z'|$

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
2. $|z - z'| \geq |z'| - |z|$

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
2. $|z - z'| \geq \Big|\, |z| - |z'| \,\Big|$

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
2. $|z - z'| \geq \big|\, |z| - |z'| \,\big|$

Au choix :
$|z| - |z'|$ ou $|z'| - |z|$

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
2. $|z - z'| \geq \big|\, |z| - |z'| \,\big|$

Au choix :
$|z| - |z'|$ ou $|z'| - |z|$

Remarque

Si $z \in \mathbb{R}$:

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
2. $|z - z'| \geq \big|\,|z| - |z'|\,\big|$

Au choix :
$|z| - |z'|$ ou $|z'| - |z|$

Remarque

Si $z \in \mathbb{R}$: Module de z = valeur absolue de z

4 Module

Théorème 3 : Règles de calcul avec le module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$
- Si $z \neq 0$: $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n$

Inégalités triangulaires.

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
2. $|z - z'| \geq \big|\, |z| - |z'| \,\big|$

Au choix :
$|z| - |z'|$ ou $|z'| - |z|$

Remarque

Si $z \in \mathbb{R}$: Module de z = valeur absolue de z

Exercice 1

1. Démontrer les inégalités triangulaires.
2. Montrer qu'il y égalité ssi z et z' sont colinéaires de même sens.

4 Module

Géométriquement

- Si $\vec{u}$ a pour affixe z :

4 Module

Géométriquement

- Si $\vec{u}$ a pour affixe z : $\quad |z| = \|\vec{u}\|$.

4 Module

Géométriquement

- Si $\vec{u}$ a pour affixe z : $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si A, B ont pour affixes a, b :

4 Module

Géométriquement

- Si $\vec{u}$ a pour affixe z : $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si A, B ont pour affixes a, b : $|b-a| = AB$

4 Module

Géométriquement

- Si $\vec{u}$ a pour affixe z : $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si A, B ont pour affixes a, b : $|b - a| = AB$

Exercice 2

Décrire géométriquement les ensembles :
a) $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ b) $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$

4 Module

Géométriquement

- Si $\vec{u}$ a pour affixe z : $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si A, B ont pour affixes a, b : $|b-a| = AB$

Cercle de centre a
et de rayon r

Exercice 2

Décrire géométriquement les ensembles :

a) $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$ b) $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$

Géométriquement

- Si $\vec{u}$ a pour affixe z : $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si A, B ont pour affixes a, b : $|b - a| = AB$

Cercle de centre a et de rayon r

Disque de centre a et de rayon r

Exercice 2

Décrire géométriquement les ensembles :

a) $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ b) $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$

4 Module

Géométriquement

- Si $\vec{u}$ a pour affixe z : $\quad |z| = \|\vec{u}\|$.
- Si A, B ont pour affixes a, b : $\quad |b-a| = AB$

Exercice 2

Cercle de centre a et de rayon r

Disque de centre a et de rayon r

Décrire géométriquement les ensembles :

a) $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$ b) $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$

Exemple 3

Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que : $\quad |z-1| = |z|$.

II Exponentielle imaginaire

I Rappels sur l'ensemble $\mathbb{C}$

II Exponentielle imaginaire

III Forme trigonométrique

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U}=$

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U}=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U}=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

Retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $z \in \mathbb{U}$ ssi :

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U}=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

Retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{z \in \mathbb{U} \quad \text{ssi :} \quad \bar{z} = \frac{1}{z}}$

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U}=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

Retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{z \in \mathbb{U} \quad \text{ssi :} \quad \bar{z} = \frac{1}{z}}$

Définition 1

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} \underset{\text{déf.}}{=}$

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U}=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

Retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{z \in \mathbb{U} \quad \text{ssi :} \quad \bar{z} = \frac{1}{z}}$

Définition 1

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} \underset{\text{déf.}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{z \in \mathbb{U} \quad \text{ssi :} \quad \bar{z} = \frac{1}{z}}$

Définition 1

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} \underset{\text{déf.}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$

Exemple 1

$e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U}=\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$

Retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{z \in \mathbb{U} \quad \text{ssi :} \quad \bar{z} = \frac{1}{z}}$

Définition 1

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} \underset{\text{déf.}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$

Exemple 1

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} =$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} =$
- $e^{i\pi} =$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} =$

1 Complexes de modules 1

Notation

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Retenir

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{z \in \mathbb{U} \quad \text{ssi :} \quad \bar{z} = \frac{1}{z}}$

Définition 1

Pour tout réel θ, on pose : $e^{i\theta} \underset{\text{déf.}}{=} \cos\theta + i\sin\theta$

Exemple 1

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

1 Complexes de modules 1

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

1 Complexes de modules 1

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

1 Complexes de modules 1

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

1 Complexes de modules 1

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

1 Complexes de modules 1

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

1 Complexes de modules 1

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

1 Complexes de modules 1

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta \equiv \theta' [2\pi]$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

1 Complexes de modules 1

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

1 Complexes de modules 1

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta \equiv \theta' [2\pi]$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

Exercice 1

Démontrer les points 3 et 4.

1 Complexes de modules 1

Théorème 1

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
2. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ ssi $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

SF 4 : Exploiter le fait que z est de module 1

Exemple 2

Trouver tous les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que : $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z-1|$.

2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 2

1. *Formule de Moivre.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

2. *Formules d'Euler.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 2

1. *Formule de Moivre.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n =$$

2. *Formules d'Euler.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 2

1. *Formule de Moivre.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2. *Formules d'Euler.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 2

1. *Formule de Moivre.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2. *Formules d'Euler.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \qquad\qquad\qquad \text{et} \qquad \sin\theta =$$

2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 2

1. *Formule de Moivre.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2. *Formules d'Euler.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta =$$

2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 2

1. *Formule de Moivre.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2. *Formules d'Euler.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2 Formule de Moivre et formules d'Euler

Théorème 2

1. *Formule de Moivre.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

2. *Formules d'Euler.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exercice 2

Démontrer la formule de Moivre et les formules d'Euler.

Théorème 3 : Transformation de $1 \pm e^{i\theta}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- $1 + e^{i\theta} =$
- $1 - e^{i\theta} =$

Théorème 3 : Transformation de $1 \pm e^{i\theta}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $1 - e^{i\theta} =$

Théorème 3 : Transformation de $1 \pm e^{i\theta}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

Théorème 3 : Transformation de $1 \pm e^{i\theta}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

Exercice 3

Démontrer ces deux formules en « factorisant par l'angle moitié »

Théorème 3 : Transformation de $1 \pm e^{i\theta}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

Exercice 3

Démontrer ces deux formules en « factorisant par l'angle moitié »

SF 5 : factoriser par l'angle moitié

Exemple 3

En factorisant $e^{ip} + e^{iq}$ par l'angle moitié, retrouver la formule de factorisation de $\cos p + \cos q$.

Euler et linéarisation

Qu'est-ce que linéariser ?

$\cos^2 x =$ $\cos^3 x =$

Euler et linéarisation

Qu'est-ce que linéariser ?

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \cos^3 x = \frac{\cos(3x)+3\cos x}{4}$$

Exemple 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser : a) $\sin^5 x$ b) $\cos^4 x \sin x$

Exemple 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser : a) $\sin^5 x$ b) $\cos^4 x \sin x$

SF 6 : Utiliser Euler pour linéariser $\cos^p x \sin^q x$

1. *Euler* : $$\cos^p x \sin^q x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^q$$

Exemple 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser : a) $\sin^5 x$ b) $\cos^4 x \sin x$

SF 6 : Utiliser Euler pour linéariser $\cos^p x \sin^q x$

1. *Euler* : $\cos^p x \sin^q x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q$
2. *Binôme* : On développe entièrement

Exemple 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser : a) $\sin^5 x$ b) $\cos^4 x \sin x$

SF 6 : Utiliser Euler pour linéariser $\cos^p x \sin^q x$

1. *Euler* : $\cos^p x \sin^q x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q$
2. *Binôme* : On développe entièrement
3. *Euler* : On regroupe les e^{inx} et les e^{-inx}.

Moivre et « délinéarisation »

Exemple 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire $\cos(4x)$ comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Moivre et « délinéarisation »

Exemple 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire $\cos(4x)$ comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

SF 7 : Utiliser Moivre pour « délinéariser » $\cos(nx)$

1. *Moivre* : $\quad \cos(nx) = \mathrm{Re}\big((\cos x + i \sin x)^n\big)$

Moivre et « délinéarisation »

Exemple 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire $\cos(4x)$ comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

SF 7 : Utiliser Moivre pour « délinéariser » $\cos(nx)$

1. *Moivre* : $\quad \cos(nx) = \mathrm{Re}\big((\cos x + i \sin x)^n\big)$
2. *Binôme* : On développe.

Moivre et « délinéarisation »

Exemple 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire $\cos(4x)$ comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

SF 7 : Utiliser Moivre pour « délinéariser » $\cos(nx)$

1. *Moivre* : $\cos(nx) = \mathrm{Re}\big((\cos x + i \sin x)^n\big)$
2. *Binôme* : On développe.
3. On extrait la partie réelle.

Calcul de sommes trigonométriques

Exemple 6

Soient $x \in \mathbb{R}$. et $n \in \mathbb{N}$.

Calculer les sommes : $\quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad$ et $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Calcul de sommes trigonométriques

Exemple 6

Soient $x \in \mathbb{R}$. et $n \in \mathbb{N}$.

Calculer les sommes : $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

SF 8 : Calculer des sommes trigonométriques

1. On utilise : $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$

Calcul de sommes trigonométriques

Exemple 6

Soient $x \in \mathbb{R}$. et $n \in \mathbb{N}$.

Calculer les sommes : $\quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad$ et $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

SF 8 : Calculer des sommes trigonométriques

1. On utilise : $\quad \cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \quad$ et $\quad \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$
2. On utilise la linéarité de Re et Im :

$$\mathrm{Re}\left(\sum \#\right) = \sum \mathrm{Re}(\#) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\sum \#\right) = \sum \mathrm{Im}(\#)$$

III Forme trigonométrique

I Rappels sur l'ensemble $\mathbb{C}$

II Exponentielle imaginaire

III Forme trigonométrique

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est :

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$

Notation

On écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$

Notation

On écrit : $\arg z \equiv \theta \;\; [2\pi]$

Remarque

Un tel θ existe car :

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$

Notation

On écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

Remarque

Un tel θ existe car : $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$

Notation

On écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

Remarque

Un tel θ existe car : $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$

Retenir Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ ssi :

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$

Notation

On écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

Remarque

Un tel θ existe car : $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$

Retenir Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \quad \text{ssi :} \quad r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta' \ [2\pi]}$$

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$

Notation

On écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

Remarque

Un tel θ existe car : $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$

Retenir Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \quad \text{ssi :} \quad r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta' \ [2\pi]}$$

Exemple 1 : Mettre sous forme trigonométrique

a) $z_1 = 1 + i$ b) $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2 + 2i}$

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$

Notation

On écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

Remarque

Un tel θ existe car : $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$

Retenir Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \quad \text{ssi :} \quad r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta' \ [2\pi]}$$

Exemple 1 : Mettre sous forme trigonométrique

a) $z_1 = 1 + i$ b) $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2 + 2i}$ c) $z_3 = xe^{i\theta}$ $(x \in \mathbb{R}^*, \ \theta \in \mathbb{R})$

1 Argument d'un complexe z non nul

Définition 1

Un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ est : un réel θ tel que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$

Notation

On écrit : $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$

Remarque

Un tel θ existe car : $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$

Retenir Pour tous $r, r' > 0$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \quad \text{ssi :} \quad r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta' \ [2\pi]}$$

Exemple 2

On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Déterminer tous les $p \in \mathbb{Z}$ tels que ω^p soit réel.

1 Argument d'un complexe z non nul

Théorème 1

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

- $\arg(zz') \equiv$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv$

1 Argument d'un complexe z non nul

Théorème 1

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ \ [2\pi]$

Théorème 1

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ \ [2\pi]$

SF 9 : calculer les puissances d'un complexe

Exemple 3

Donner la forme algébrique de $(1+i)^{10}$.

1 Argument d'un complexe z non nul

Théorème 1

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\ \ [2\pi]$

Exercice 1

Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \ldots, z_n$ ont même argument.

2 Exponentielle complexe

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

L'exponentielle de z est le complexe : $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=}$

Par construction :
- $|\exp(z)| =$
- $\arg(\exp z) \equiv$

2 Exponentielle complexe

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

L'exponentielle de z est le complexe : $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=} e^x \; e^{iy}$

Par construction :
- $|\exp(z)| =$
- $\arg(\exp z) \equiv$

2 Exponentielle complexe

Définition 2

exponentielle réelle

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

L'exponentielle de z est le complexe : $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=} e^x \; e^{iy}$

Par construction :
- $|\exp(z)| =$
- $\arg(\exp z) \equiv$

2 Exponentielle complexe

exponentielle imaginaire
$\cos y + i \sin y$

exponentielle réelle

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

L'exponentielle de z est le complexe : $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=} e^x \quad e^{iy}$

Par construction :

- $|\exp(z)| =$
- $\arg(\exp z) \equiv$

2 Exponentielle complexe

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

L'exponentielle de z est le complexe : $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=} \underbrace{e^x}_{\text{exponentielle réelle}} \ \underbrace{e^{iy}}_{\substack{\text{exponentielle imaginaire} \\ \cos y + i \sin y}}$

Par construction : ▪ $|\exp(z)| = e^x$ ▪ $\arg(\exp z) \equiv$

2 Exponentielle complexe

exponentielle imaginaire
$\cos y + i \sin y$

exponentielle
réelle

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

L'exponentielle de z est le complexe : $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=} e^x \; e^{iy}$

Par construction : ▪ $|\exp(z)| = e^x$ ▪ $\arg(\exp z) \equiv y \; [2\pi]$

exponentielle imaginaire
$\cos y + i \sin y$

exponentielle
réelle

Définition 2

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

L'exponentielle de z est le complexe : $\exp(z) \underset{\text{déf.}}{=} e^x \; e^{iy}$

Par construction : ▪ $|\exp(z)| = e^x$ ▪ $\arg(\exp z) \equiv y \quad [2\pi]$

Exemple 4

Donner la forme algébrique de $Z = \exp(2 + i\frac{\pi}{3})$.

Théorème 2 : Relation fonctionnelle

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

Théorème 2 : Relation fonctionnelle

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$

2 Exponentielle complexe

Théorème 2 : Relation fonctionnelle

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\quad \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$

Exercice 2

Démontrer la formule du théorème.

Théorème 2 : Relation fonctionnelle

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\quad \exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$

SF 10 : Résoudre une équation de la forme $\exp(z) = a$

Exemple 5

Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

a) $\exp(z) = \sqrt{3} + i$ $\qquad$ b) $\exp(iz\pi) = 1 - i$

3 Complément : dérivation des fonctions complexes

Cadre

- On considère une fonction $\varphi : I \to \boxed{\mathbb{C}}$
- Pour tout $t \in I$: $\quad \varphi(t) = u(t) + iv(t)$

Dérivée

Intégrale

3 Complément : dérivation des fonctions complexes

Cadre

- On considère une fonction $\varphi : I \to \mathbb{C}$

partie réelle

partie imaginaire

- Pour tout $t \in I$: $\varphi(t) = u(t) + i\, v(t)$

Dérivée

Intégrale

3 Complément : dérivation des fonctions complexes

Cadre

partie réelle

partie imaginaire

- On considère une fonction $\varphi : I \to \mathbb{C}$
- Pour tout $t \in I$: $\varphi(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{partie réelle}} + i \underbrace{v(t)}_{\text{partie imaginaire}}$

Dérivée

Si les fonctions u et v sont dérivables : $\varphi'(t) \underset{\text{déf.}}{=} u'(t) + iv'(t)$ pour tout $t \in I$

Intégrale

Si u et v sont continues : $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{déf.}}{=} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$