Sommes et produits

Chapitre 2

I Les symboles $\sum$ et $\prod$

1 Définitions

Cadre

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

1 Définitions

Cadre

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

Notations

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=}$

1 Définitions

Cadre

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

Notations

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=}$

1 Définitions

Cadre

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

Notations

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 \times a_2 \times \ldots a_n$

1 Définitions

Cadre

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

Notations

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 \times a_2 \times \ldots a_n$

Retenir

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k =$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k =$

1 Définitions

Cadre

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

Notations

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 \times a_2 \times \dots a_n$

Retenir

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k =$

1 Définitions

Cadre

$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

Notations

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 \times a_2 \times \ldots a_n$

Retenir

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times a_{n+1}$

1 Définitions

Cadre

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

Notations

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1 \times a_2 \times \dots a_n$

Retenir

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times a_{n+1}$

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+n}$

1 Définitions

Sommes/produits de termes constants.

Pour tout complexe $c \in \mathbb{C}$:

- $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c \;=\; \qquad}$
- $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} c \;=\; \qquad}$

$\underbrace{c + \cdots + c}_{n \text{ fois}}$

Sommes/produits de termes constants.

Pour tout complexe $c \in \mathbb{C}$:

- $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc}$
- $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} c =}$

1 Définitions

Sommes/produits de termes constants.

Pour tout complexe $c \in \mathbb{C}$:

- $\boxed{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} c}_{\underbrace{c+\cdots+c}_{n \text{ fois}}} = nc}$
- $\boxed{\underbrace{\prod_{k=1}^{n} c}_{\underbrace{c\times\cdots\times c}_{n \text{ fois}}} = c^n}$

1 Définitions

Sommes/produits de termes constants.

Pour tout complexe $c \in \mathbb{C}$:

- $$\boxed{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} c}_{c + \cdots + c \ (n \text{ fois})} = nc}$$
- $$\boxed{\underbrace{\prod_{k=1}^{n} c}_{c \times \cdots \times c \ (n \text{ fois})} = c^n}$$

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 =$$

Sommes/produits de termes constants.

Pour tout complexe $c \in \mathbb{C}$:

- $\boxed{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} c}_{c+\cdots+c \text{ (n fois)}} = nc}$
- $\boxed{\underbrace{\prod_{k=1}^{n} c}_{c\times\cdots\times c \text{ (n fois)}} = c^n}$

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2$$

1 Définitions

Sommes/produits de termes constants.

Pour tout complexe $c \in \mathbb{C}$:

- $\underbrace{c + \cdots + c}_{n \text{ fois}} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} c = nc}$
- $\underbrace{c \times \cdots \times c}_{n \text{ fois}} = \boxed{\prod_{k=1}^{n} c = c^n}$

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2$$

1 Définitions

Sommes/produits de termes constants.

Pour tout complexe $c \in \mathbb{C}$:

- $$\underbrace{c + \cdots + c}_{n \text{ fois}} = \sum_{k=1}^{n} c = nc$$
- $$\underbrace{c \times \cdots \times c}_{n \text{ fois}} = \prod_{k=1}^{n} c = c^n$$

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$$

2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$$

2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$$

Exemple 2 : Vrai ou faux ?

a) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$ b) $\prod_{j=1}^{n} j = n!$ c) $\prod_{k=1}^{n} n = n!$ d) $\prod_{n=1}^{n} n = n!$

2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$$

Exemple 2 : Vrai ou faux ?

a) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$ b) $\boxed{\prod_{j=1}^{n} j = n!}$ c) $\prod_{k=1}^{n} n = n!$ d) $\prod_{n=1}^{n} n = n!$

Vrai

2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$$

Exemple 2 : Vrai ou faux ?

a) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$ Vrai

b) $\boxed{\prod_{j=1}^{n} j = n!}$ Vrai

c) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} n = n!}$

d) $\prod_{n=1}^{n} n = n!$

2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$$

Exemple 2 : Vrai ou faux ?

a) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$ Vrai

b) $\boxed{\prod_{j=1}^{n} j = n!}$ Vrai

c) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} n = n!}$ Faux

d) $\boxed{\prod_{n=1}^{n} n = n!}$

2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

Remarque

La lettre k intervenant dans la définition est une variable *muette*.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=1}^{100} j^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$$

Exemple 2 : Vrai ou faux ?

a) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k = n!}$ Vrai

b) $\boxed{\prod_{j=1}^{n} j = n!}$ Vrai

c) $\boxed{\prod_{k=1}^{n} n = n!}$ Faux

d) $\boxed{\prod_{n=1}^{n} n = n!}$ Faux

3 Généralisation

Généralisation

- $\sum_{i \in I} a_i$ désigne la somme de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\ \in I}$
- $\prod_{i \in I} a_i$ désigne le produit de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\ \in I}$

Convention des sommes et produits vides

- $\sum_{i \in \varnothing} a_i =$
- $\prod_{i \in \varnothing} a_i =$

Généralisation

- $\sum_{i \in I} a_i$ désigne la somme de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$
- $\prod_{i \in I} a_i$ désigne le produit de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$

Convention des sommes et produits vides

- $\sum_{i \in \varnothing} a_i = 0$
- $\prod_{i \in \varnothing} a_i =$

3 Généralisation

Généralisation

- $\sum\limits_{i \in I} a_i$ désigne la somme de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\ \in I}$
- $\prod\limits_{i \in I} a_i$ désigne le produit de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\ \in I}$

Convention des sommes et produits vides

- $\sum\limits_{i \in \varnothing} a_i = 0$
- $\prod\limits_{i \in \varnothing} a_i = 1$

4 Règles de base

Convention des sommes et produits vides

- $\sum_{i \in \varnothing} a_i = 0$
- $\prod_{i \in \varnothing} a_i = 1$

Rayer les relations fausses

$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$	$\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$
$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$	$\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$
$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$	$\prod_{k=1}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \prod_{k=1}^{n} a_k$
$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k^p$	$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p = \prod_{k=1}^{n} a_k^p$

4 Règles de base

Convention des sommes et produits vides

- $\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$
- $\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$

Rayer les relations fausses

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$	$\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}b_k$
$\xcancel{\sum_{k=1}^{n}a_k b_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)}$	$\prod_{k=1}^{n}a_k b_k=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)$
$\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$	$\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k)=\lambda\prod_{k=1}^{n}a_k$
$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p$	$\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\prod_{k=1}^{n}a_k^p$

Convention des sommes et produits vides

- $\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$
- $\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$

Rayer les relations fausses

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$	$\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}b_k$
$\cancel{\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)}$	$\prod_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)$
$\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$	$\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k)=\lambda\prod_{k=1}^{n}a_k$
$\cancel{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p}$	$\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\prod_{k=1}^{n}a_k^p$

4 Règles de base

Convention des sommes et produits vides

- $\displaystyle\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$
- $\displaystyle\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$

Rayer les relations fausses	
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$	$\cancel{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}b_k}$
$\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k b_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)}$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a_k b_k=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k)=\lambda\prod_{k=1}^{n}a_k$
$\cancel{\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p}$	$\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\prod_{k=1}^{n}a_k^p$

4 Règles de base

Convention des sommes et produits vides

- $\displaystyle\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$
- $\displaystyle\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$

Rayer les relations fausses

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$	$\xcancel{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k}$
$\xcancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)}$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$
$\xcancel{\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k^p}$	$\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p = \prod_{k=1}^{n} a_k^p$

4 Règles de base

Rayer les relations fausses

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$	$\cancel{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}b_k}$
$\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)}$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k)=\boxed{\lambda^n}\prod_{k=1}^{n}a_k$
$\cancel{\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p}$	$\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\prod_{k=1}^{n}a_k^p$

Exercice 1

On suppose $a_1,\ldots,a_n>0$. Compléter : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln a_k=$

4 Règles de base

Rayer les relations fausses

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$	$\cancel{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\prod_{k=1}^{n}a_k+\prod_{k=1}^{n}b_k}$
$\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)}$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$	$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k)=\lambda^n\prod_{k=1}^{n}a_k$
$\cancel{\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p}$	$\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\prod_{k=1}^{n}a_k^p$

Exercice 1

On suppose $a_1,\ldots,a_n>0$. Compléter : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln a_k=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)$

4 Règles de base

Exercice 1

On suppose $a_1, \ldots, a_n > 0$. Compléter : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln a_k = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$

Exercice 2

On suppose que $a_1 \leq b_1$, ..., $a_n \leq b_n$ et que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Montrer qu'alors : $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.

II Techniques de calcul

1 Télescopage

Théorème 1 : Sommes et produits télescopiques

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} =$$

1 Télescopage

Théorème 1 : Sommes et produits télescopiques

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \; a_{n+1} - a_0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} =$$

1 Télescopage

Théorème 1 : Sommes et produits télescopiques

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

1 Télescopage

Théorème 1 : Sommes et produits télescopiques

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \boxed{a_{n+1}-a_0} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

différence des termes extrêmes

1 Télescopage

Théorème 1 : Sommes et produits télescopiques

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \boxed{a_{n+1}-a_0} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

différence des termes extrêmes

Exercice 1

Etablir les deux formules ci-dessus.

1 Télescopage

Théorème 1 : Sommes et produits télescopiques

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = \boxed{a_{n+1}-a_0} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

différence des termes extrêmes

Exercice 1

Etablir les deux formules ci-dessus.

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ b) $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \underset{k=j+1}{=}$$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} = \sum_{j=} a_j$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k = \sum_{j=1} a$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{j=}^{n} a$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=} a_j$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k = \sum_{j=1} a$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{j=}^{n} a$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k = \sum_{j=1} a$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{j=}^{n} a$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k = \sum_{j=1} a$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{j=}^{n} a$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k \underset{k=j+3}{=} \sum_{j=1} a_{j+3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{j=}^{n} a$

2 Exemples de changements d'indice

Le décalage

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{k=j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k \underset{k=j+3}{=} \sum_{j=1}^{n-3} a_{j+3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k \quad = \quad \sum_{j=}^{n} a$

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k \overset{j=k-3}{\underset{k=j+3}{=}} \sum_{j=1}^{n-3} a_{j+3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{j=}^{n} a$

2 Exemples de changements d'indice

Exercice 2 : Compléter

a) $\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$

b) $\sum_{k=4}^{n} a_k \overset{j=k-3}{\underset{k=j+3}{=}} \sum_{j=1}^{n-3} a_{j+3} = \sum_{k=1}^{n-3} a_{k+3}$

c) $\sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{j=}^{n} a$

2 Exemples de changements d'indice

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k \overset{j=k-3}{\underset{k=j+3}{=}} \sum_{j=1}^{n-3} a_{j+3} = \sum_{k=1}^{n-3} a_{k+3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k \underset{j=k-2}{=} \sum_{j=}^{n} a$

Exercice 2 : Compléter

a) $$\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$$

b) $$\sum_{k=4}^{n} a_k \overset{j=k-3}{\underset{k=j+3}{=}} \sum_{j=1}^{n-3} a_{j+3} = \sum_{k=1}^{n-3} a_{k+3}$$

c) $$\sum_{k=3}^{n+2} a_k \overset{k=j+2}{\underset{j=k-2}{=}} \sum_{j=}^{n} a_{j+2}$$

2 Exemples de changements d'indice

Exercice 2 : Compléter

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} \underset{j=k+2}{=} \sum_{j=5}^{n+2} a_j = \sum_{k=5}^{n+2} a_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_k \underset{k=j+3}{\overset{j=k-3}{=}} \sum_{j=1}^{n-3} a_{j+3} = \sum_{k=1}^{n-3} a_{k+3}$

c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} a_k \underset{j=k-2}{\overset{k=j+2}{=}} \sum_{j=1}^{n} a_{j+2}$

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une expression simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$

3 Exemples de changements d'indice

Le renversement

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}$$

3 Exemples de changements d'indice

Le renversement

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{a_0 + \cdots + a_n} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}}_{a_n + \cdots + a_0}$$

3 Exemples de changements d'indice

Le renversement

$$\overbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}^{a_0 + \cdots + a_n} = \overbrace{\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}}^{a_n + \cdots + a_0}$$

Remarque

Pour une somme indexée à partir de 1 :

3 Exemples de changements d'indice

Le renversement

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}$$

Remarque

Pour une somme indexée à partir de 1 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a$

3 Exemples de changements d'indice

Le renversement

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}$$

Remarque

Pour une somme indexée à partir de 1 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}$

3 Exemples de changements d'indice

Le renversement

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}$$

Remarque

Pour une somme indexée à partir de 1 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}$

Exemple 3

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} k.$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\displaystyle T_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$

Regroupements de termes

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k^2$.

3 Exemples de regroupements de termes

Regroupements de termes

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme suivante : $\quad S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k^2.$

Séparation des termes d'indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_k = \sum_{k=0} a_{2k} + \sum_{k=0} a_{2k+1}$$

Regroupements de termes

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k^2$.

Séparation des termes d'indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_k = \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_{2k}}}_{a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}} + \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}}}_{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}$$

3 Exemples de regroupements de termes

Regroupements de termes

Exemple 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad .$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}.$$

3 Exemples de regroupements de termes

Regroupements de termes

Exemple 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$.

Séparation des termes d'indices pairs et impairs

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=} a_{2k} + \sum_{k=} a_{2k+1}$$

3 Exemples de regroupements de termes

Regroupements de termes

Exemple 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$.

Séparation des termes d'indices pairs et impairs

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}$$

4 Des sommes à connaître

Théorème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k =$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 =$

4 Des sommes à connaître

Théorème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 =$

4 Des sommes à connaître

Théorème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4 Des sommes à connaître

Théorème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 3

Démontrer la formule sur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ en développant $(k+1)^3 - k^3$.

4 Des sommes à connaître

Théorème 3 : Sommes géométriques

Pour tous $q \in \mathbb{C}$ et $m \leq n$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k =$

4 Des sommes à connaître

Théorème 3 : Sommes géométriques

Pour tous $q \in \mathbb{C}$ et $m \leq n$: $$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^m - q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n - m + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

4 Des sommes à connaître

Théorème 3 : Sommes géométriques

Pour tous $q \in \mathbb{C}$ et $m \leq n$: $$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^m - q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n - m + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

En particulier, si $q \neq 1$: $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

4 Des sommes à connaître

Théorème 3 : Sommes géométriques

Pour tous $q \in \mathbb{C}$ et $m \leq n$: $$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^m - q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n - m + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

En particulier, si $q \neq 1$: $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Exercice 4

Démontrer la première formule en calculant $(1-q)\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k$.

4 Des sommes à connaître

Théorème 4 : Factorisation de $a^n - b^n$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad a^n - b^n =$

Théorème 4 : Factorisation de $a^n - b^n$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

4 Des sommes à connaître

Théorème 4 : Factorisation de $a^n - b^n$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Exemple 6

a) $a^3 - b^3 =$

b) $a^4 - b^4 =$

4 Des sommes à connaître

Théorème 4 : Factorisation de $a^n - b^n$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Exemple 6

a) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

b) $a^4 - b^4 =$

4 Des sommes à connaître

Théorème 4 : Factorisation de $a^n - b^n$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $$a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Exemple 6

a) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

b) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$

4 Des sommes à connaître

Théorème 4 : Factorisation de $a^n - b^n$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

Exemple 6

a) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

b) $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$

Exercice 5

Démontrer la formule en calculant $(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

Bonus : preuve de l'inégalité de Jensen

Exercice 6 : Preuve de l'inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tous $a_1, \ldots, a_n \in I$ et $t_1, \ldots, t_n \in [0\,,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)$$

III Coefficients binomiaux et formule du binôme

1 Coefficient binomial

Définition 1

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,,n]\!]$, on pose :

$$\binom{n}{p} =$$

1 Coefficient binomial

Définition 1

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,,n]\!]$, on pose :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

1 Coefficient binomial

Définition 1

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,,n]\!]$, on pose :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1 Coefficient binomial

Définition 1

p facteurs

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,,n]\!]$, on pose :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1 Coefficient binomial

Définition 1

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,,n]\!]$, on pose :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque

Pour $p > n$ ou $p < 0$ on convient que : $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.

1 Coefficient binomial

Définition 1

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,,n]\!]$, on pose :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque

Pour $p > n$ ou $p < 0$ on convient que : $\binom{n}{p} = 0$.

Exercice 1

Calculer : a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{7}{3}$

1 Coefficient binomial

Théorème 1 : Formules à savoir

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0\,, n]\!]$.

- *Symétrie :*
- *Formule de Pascal :*
- *Formule « sans nom » :*

1 Coefficient binomial

Théorème 1 : Formules à savoir

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0\,,n]\!]$.

- *Symétrie :* $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.
- *Formule de Pascal :*
- *Formule « sans nom » :*

Théorème 1 : Formules à savoir

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0\,,n]\!]$.

- *Symétrie :* $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.
- *Formule de Pascal :* $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$
- *Formule « sans nom » :*

1 Coefficient binomial

Théorème 1 : Formules à savoir

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0\,,n]\!]$.

- *Symétrie :* $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.
- *Formule de Pascal :* $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$
- *Formule « sans nom » :* si $p \neq 0$, $\quad \dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$

Remarque

Les formules restent vraies lorsque $p < 0$ ou $p > n$

Théorème 1 : Formules à savoir

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [\![0\,,n]\!]$.

- *Symétrie :* $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- *Formule de Pascal :* $\displaystyle\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
- *Formule « sans nom » :* si $p \neq 0$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

Exercice 2

Démontrer la formule de Pascal.

1 Coefficient binomial

Théorème 2 : Valeurs

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} =$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} =$

1 Coefficient binomial

Théorème 2 : Valeurs

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} =$

Théorème 2 : Valeurs

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

1 Coefficient binomial

Théorème 2 : Valeurs

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Théorème 2 : Valeurs

- $\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1		1				
3	1			1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1

1 Coefficient binomial

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1			1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1

1 Coefficient binomial

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3		1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1

1 Coefficient binomial

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1				1		
5	1					1	
6	1						1

1 Coefficient binomial

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4			1		
5	1					1	
6	1						1

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6		1		
5	1					1	
6	1						1

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1					1	
6	1						1

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5				1	
6	1						1

1 Coefficient binomial

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10			1	
6	1						1

1 Coefficient binomial

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10		1	
6	1						1

1 Coefficient binomial

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1						1

Le triangle de Pascal

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

2 Formule du binôme de Newton

Théorème 3 : Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

2 Formule du binôme de Newton

Théorème 3 : Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

2 Formule du binôme de Newton

Théorème 3 : Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exercice 3

Développer : $\quad (a+b)^2, \quad (a+b)^3, \quad (a-b)^3 \quad$ et $\quad (a-b)^4$.

Théorème 3 : Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

2 Formule du binôme de Newton

Théorème 3 : Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exercice 4

Démontrer la formule du binôme par récurrence sur n.

2 Formule du binôme de Newton

Théorème 3 : Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme : $\quad A_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$

IV Sommes doubles

Sommes doubles

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \boxed{}$$

Sommes doubles

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}}$$

$$\begin{array}{ccccc} & j=1 & j=2 & \dots & j=p \\ i=1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ i=2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ i=n & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{array} \begin{array}{c} \\ \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \\ \\ \rightsquigarrow \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1,j} \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2,j} \\ \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{n,j} \end{array}\right\} S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$$

Sommes doubles

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}}$$

$$\left.\begin{array}{c|cccc}
 & j=1 & j=2 & \dots & j=p \\
i=1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\
i=2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
i=n & a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{i,p}
\end{array}\right\} S = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Sommes doubles

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}}$$

Exemple 1

Calculer :

a) $S_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n} i$ b) $S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)$ c) $S_3 = \sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{2i-j}$

Sommes triangulaires

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=}\sum_{j=} a_{i,j}}$$

Sommes triangulaires

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}}$$

d'abord : $1 \leq i \leq n$

puis : $i \leq j \leq n$

Sommes triangulaires

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=}\sum_{i=} a_{i,j}}$$

d'abord : j
puis : i

Sommes triangulaires

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}}$$

d'abord : $1 \leq j \leq n$

puis : $1 \leq i \leq j$

Sommes triangulaires

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}}$$

Sommes triangulaires

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=} \sum_{j=} a_{i,j} = \sum_{j=} \sum_{i=} a_{i,j}}$$

Sommes triangulaires

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}}$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=}\sum_{i=} a_{i,j}}$$

Sommes triangulaires

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}}$$

SF 4 : Intervertir des symboles $\sum$

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}}$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \boxed{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}}$$

Exemple 2

Calculer : a) $S_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}$. b) $S_2 = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} i$.