Suites

Niveau 2

Chapitre 12

I Limite d'une suite

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$,

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

aussi petit soit-il

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$,

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

aussi petit soit-il

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

aussi petit soit-il

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

aussi petit soit-il

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$.

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

aussi petit soit-il

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$u_n \in [\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

aussi petit soit-il

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$.

☢ **Attention** ☢ n_0 dépend de ε. ▸ Figure

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$u_n \in [\ell - \varepsilon , \ell + \varepsilon]$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad \boxed{|u_n - \ell| \leq \varepsilon}$$

exigence de précision

réponse adaptée à cette exigence

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[\ell - \varepsilon , \ell + \varepsilon]$.

Attention n_0 dépend de ε.

Figure

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$u_n \in [\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad \boxed{|u_n - \ell| \leq \varepsilon}$$

exigence de précision

réponse adaptée à cette exigence

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$.

☢ **Attention** ☢ n_0 dépend de ε. ▸ Figure

Exercice 1

1 Montrer que si $\quad u_n \to \ell \quad$ et $\quad v_n \to \ell'$ alors : $\quad u_n + v_n \to \ell + \ell'$

1 Suites convergentes

Définition 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$u_n \in [\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

exigence de précision

réponse adaptée à cette exigence

Explication

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[\ell - \varepsilon\,, \ell + \varepsilon]$.

Attention n_0 dépend de ε. Figure

Exercice 1

2 Démontrer le théorème d'encadrement.

2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Dans le cas où u est convergente, le réel ℓ de la définition est unique, appelé limite de u et noté $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
- Dans le cas contraire, on dit que u est *divergente.*

Exercice 2

Démontrer l'unicité de la limite en raisonnant par l'absurde.

2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2

Toute suite convergente est :

2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2

Toute suite convergente est : bornée.

2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2

Toute suite convergente est : bornée.

☢ Attention ☢

La réciproque est fausse par exemple :

Théorème 2

Toute suite convergente est : bornée.

☢ Attention ☢

La réciproque est fausse par exemple : $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas

Exercice 3

1. Démontrer le théorème précédent.

2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2

Toute suite convergente est : bornée.

☢ Attention ☢

La réciproque est fausse par exemple : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas

Exercice 3

1. Démontrer le théorème précédent.
2. Montrer que si u est bornée et si $v_n \to 0$ alors : $u_n v_n \to 0$

2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2

Toute suite convergente est : bornée.

☢ Attention ☢

La réciproque est fausse par exemple : $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas

Exercice 3

1. Démontrer le théorème précédent.
2. Montrer que si u est bornée et si $v_n \to 0$ alors : $\quad u_n v_n \to 0$
3. Montrer que si $\quad u_n \to \ell \quad$ et $\quad v_n \to \ell' \quad$ alors : $\quad u_n v_n \to \ell\ell'$

Théorème 3

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u converge vers $\ell > 0$, alors :

Théorème 3

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u converge vers $\ell > 0$, alors : $u_n > 0$

Théorème 3

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u converge vers $\ell > 0$, alors : $u_n > 0$ APCR

2 Propriétés des suites convergentes

à partir
d'un certain rang

Théorème 3

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u converge vers $\ell > 0$, alors : $u_n > 0$ APCR

Exercice 4

1. Démontrer ce théorème.

à partir
d'un certain rang

Théorème 3

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u converge vers $\ell > 0$, alors : $u_n > 0$ APCR

Exercice 4

2. En déduire une démonstration du théorème de passage aux limites dans les inégalités larges.

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

Explication

$u_n \to +\infty$ si :

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

Explication

$u_n \to +\infty$ si : pour tout $A \in \mathbb{R}$,

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

Explication

aussi grand soit-il

$u_n \to +\infty$ si : pour tout $A \in \mathbb{R}$,

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

aussi grand soit-il

qui dépend de A

Explication

$u_n \to +\infty$ si : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0,

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

aussi grand soit-il

qui dépend de A

Explication

$u_n \to +\infty$ si : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0, à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[A\,, +\infty[$.

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

aussi grand soit-il

qui dépend de A

Explication

$u_n \to +\infty$ si : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0, à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[A\,, +\infty[$.

Exercice 5

1. Démontrer le théorème de minoration.

3 Suites tendant vers l'infini

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

aussi grand soit-il

qui dépend de A

Explication

$u_n \to +\infty$ si : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0, à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[A, +\infty[$.

Exercice 5

2 Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

aussi grand soit-il

qui dépend de A

Explication

$u_n \to +\infty$ si : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0, à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[A, +\infty[$.

Exercice 5

3 Démontrer que si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$ alors : $\dfrac{1}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 2

- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$
- Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

aussi grand soit-il

qui dépend de A

Explication

$u_n \to +\infty$ si : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang n_0, à partir duquel tous les u_n appartiennent à $[A, +\infty[$.

Exemple 1 : ☢ Attention ☢

Montrer qu'une suite non bornée ne tend pas forcément vers $\pm\infty$.

4 Tableau récapitulatif

	Suite convergente	Suite divergente	
Limite ?			

4 Tableau récapitulatif

	Suite convergente	**Suite divergente**	
Limite ?	Limite finie		

4 Tableau récapitulatif

	Suite convergente	Suite divergente	
Limite ?	Limite finie	Limite $\pm\infty$	

4 Tableau récapitulatif

	Suite convergente	**Suite divergente**	
Limite ?	Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite

4 Tableau récapitulatif

	Suite convergente	Suite divergente	
Limite ?	Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite

Exercice 6 : Lemme de Cesàro

On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose : $\quad v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k.$

Montrer : $\quad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

II Suites extraites

1 Définition

Définition 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que v est une sous-suite ou suite extraite de u si :

1 Définition

Définition 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que v est une sous-suite ou suite extraite de u si : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

La suite des indices choisis

Définition 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que v est une sous-suite ou suite extraite de u si : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

1 Définition

La suite des indices choisis

Définition 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que v est une sous-suite ou suite extraite de u si : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

Remarque

Dit autrement : $v =$

La suite des indices choisis

Définition 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que v est une sous-suite ou suite extraite de u si : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; v_n = u_{\varphi(n)}$$

Remarque

Dit autrement : $v = u \circ \varphi$

1 Définition

La suite des indices choisis

Définition 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que v est une sous-suite ou suite extraite de u si : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

Remarque

Dit autrement : $v = u \circ \varphi$

Exemple 1

1. Montrer que les suites constantes $v = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $u = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1 Définition

La suite des indices choisis

Définition 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que v est une sous-suite ou suite extraite de u si : il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$$

Remarque

Dit autrement : $v = u \circ \varphi$

Exemple 1

2. Montrer que $v = (4n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $u = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

1 Définition

Théorème 1

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Théorème 1

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) \geq n$

1 Définition

Théorème 1

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \varphi(n) \geq n$

Exercice 1

Démontrer le théorème.

2 Limite et suites extraites

Théorème 2

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors :

2 Limite et suites extraites

Théorème 2

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors : toutes les sous-suites de u tendent vers ℓ.

finie ou non

Théorème 2

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors : toutes les sous-suites de u tendent vers ℓ.

finie ou non

Théorème 2

Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors : toutes les sous-suites de u tendent vers ℓ.

SF 9 : Prouver qu'une suite n'a pas de limite

Exemple 2 : Figure

Montrer que la suite $u = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

2 Limite et suites extraites

finie ou non

Théorème 2

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors : toutes les sous-suites de u tendent vers ℓ.

Exercice 2 : Suites géométriques : cas divergeant

a) Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

b) Soit $q < -1$. Montrer que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

Théorème 3

Si : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2 Limite et suites extraites

Théorème 3

Si : $\quad u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad$ et $\quad u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad$ alors : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$

3 Deux applications classiques

Théorème 2

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors : toutes les sous-suites de u tendent vers ℓ.

Théorème 3

Si : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 4 : Suite harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ **pour tout** $n \geq 1$

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$
   b) En déduire : $H_n \to +\infty$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.
   Montrer que u et v sont adjacentes.

3 Deux applications classiques

Théorème 2

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors : toutes les sous-suites de u tendent vers ℓ.

Théorème 3

Si : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 5 : Suite harmonique alternée $(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_{n\geq 1}$

a) Prouver que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b) Etudier la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème 4

Toute suite bornée :

4 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 4

Toute suite bornée : possède une sous-suite convergente.

4 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 4

Toute suite bornée : possède une sous-suite convergente.

Exercice 3 : Principe de démonstration par dichotomie ▸ Figure

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a \leq u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $I_n = [a_n\,, b_n]$ possède une infinité de termes de la suite (u_n)
- $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

III Complément : extension aux suites complexes

Extension aux suites complexes

Définition 1

Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

Définition 2

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Extension aux suites complexes

Définition 1

Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{|u_n|}_{\text{Module}} \leq M$$

Définition 2

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \underbrace{|u_n - \ell|}_{\text{Module}} \leq \varepsilon$$

Extension aux suites complexes

Définition 1

Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \underbrace{|u_n|}_{\text{Module}} \leq M$$

Définition 2

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \qquad \underbrace{|u_n - \ell|}_{\text{Module}} \leq \varepsilon$$

Exemple 1

Soit $q \in \mathbb{C}$. Si $|q| < 1$, alors : $\quad q^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Extension aux suites complexes

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. Il y a équivalence entre :

1. $u_n \to \ell$
2. $\operatorname{Re} u_n \to \operatorname{Re} \ell \quad$ et $\quad \operatorname{Im} u_n \to \operatorname{Im} \ell$.

Extension aux suites complexes

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. Il y a équivalence entre :

1. $u_n \to \ell$
2. $\operatorname{Re} u_n \to \operatorname{Re} \ell \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} u_n \to \operatorname{Im} \ell$.

Exemple 2

Etudier la convergence de la suite complexe définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n - 3\overline{u}_n}{5}$$

Extension aux suites complexes

Ce qui reste

Extension aux suites complexes

Ce qui reste
Unicité de la limite
Toute suite convergente est bornée
Opérations sur les limites
Suites extraites
Théorème de Bolzano-Weierstrass

Extension aux suites complexes

Ce qui reste
Unicité de la limite
Toute suite convergente est bornée
Opérations sur les limites
Suites extraites
Théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce qui ne reste pas
Notion de limite infinie
Théorème de passage aux limites dans les inégalités
Théorèmes de comparaison
Théorème de la limite monotone
Théorème des suites adjacentes

Extension aux suites complexes

Ce qui reste
Unicité de la limite
Toute suite convergente est bornée
Opérations sur les limites
Suites extraites
Théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce qui ne reste pas
Notion de limite infinie
Théorème de passage aux limites dans les inégalités
Théorèmes de comparaison
Théorème de la limite monotone
Théorème des suites adjacentes

Exercice 1

Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas d'une suite complexe.

IV Borne supérieure, borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

1 Rappel : plus grand/plus petit élément pour l'ordre naturel

Rappel

- A est une partie de $\mathbb{R}$

1 Rappel : plus grand/plus petit élément pour l'ordre naturel

Rappel

- A est une partie de $\mathbb{R}$
- On appelle *plus grand élément* (P.G.E.) de A tout majorant de A qui appartient à A

1 Rappel : plus grand/plus petit élément pour l'ordre naturel

Un réel M tel que :
$\forall a \in A, \quad a \leq M$

Rappel

- A est une partie de $\mathbb{R}$
- On appelle *plus grand élément* (P.G.E.) de A tout majorant de A qui appartient à A

1 Rappel : plus grand/plus petit élément pour l'ordre naturel

Un réel M tel que :
$\forall a \in A, \quad a \leq M$

Rappel

- A est une partie de $\mathbb{R}$
- On appelle *plus grand élément* (P.G.E.) de A tout majorant de A qui appartient à A
- On définit de même la notion de plus petit élément (P.P.E.).

Exemple 1 : $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

a) A est-elle majorée ? minorée ?

b) A possède-t-elle un plus grand/petit élément ?

Théorème 1 : Cas des parties de $\mathbb{N}$

i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède :

ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède :

1 Rappel : plus grand/plus petit élément pour l'ordre naturel

Plus petit élément

Théorème 1 : Cas des parties de $\mathbb{N}$

i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède : un P.P.E.

ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède :

1 Rappel : plus grand/plus petit élément pour l'ordre naturel

Plus petit élément

Théorème 1 : Cas des parties de $\mathbb{N}$

i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède : un P.P.E.

ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède : un P.G.E.

1 Rappel : plus grand/plus petit élément pour l'ordre naturel

Plus petit élément

Théorème 1 : Cas des parties de $\mathbb{N}$

i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède : un P.P.E.

ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède : un P.G.E.

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du théorème précédent, justifier l'existence de : $a \wedge b$ et $a \vee b$.
2. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. Justifier l'existence de $v_p(a)$.

Plus petit élément

Théorème 1 : Cas des parties de $\mathbb{N}$

i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède : un P.P.E.

ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède : un P.G.E.

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du théorème précédent, justifier l'existence de : $a \wedge b$ et $a \vee b$.
2. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. Justifier l'existence de $v_p(a)$.

☢ **Attention** ☢ Ce théorème est faux pour une partie de $\mathbb{R}$.
Par exemple :

Plus petit élément

Théorème 1 : Cas des parties de $\mathbb{N}$

i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède : un P.P.E.

ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède : un P.G.E.

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. A l'aide du théorème précédent, justifier l'existence de : $a \wedge b$ et $a \vee b$.
2. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. Justifier l'existence de $v_p(a)$.

☢ **Attention** ☢ Ce théorème est faux pour une partie de $\mathbb{R}$.
Par exemple : $[0\,,1[$ est majorée mais n'a pas de P.G.E.

2 Borne supérieure/inférieure

Définition 1

- La borne supérieure de A est, s'il existe :
- La borne inférieure de A est, s'il existe :

Définition 1

- La borne supérieure de A est, s'il existe : le plus petit des majorants de A, alors noté $\sup A$.
- La borne inférieure de A est, s'il existe :

2 Borne supérieure/inférieure

Définition 1

- La borne supérieure de A est, s'il existe : le plus petit des majorants de A, alors noté $\sup A$.
- La borne inférieure de A est, s'il existe : le plus grand des minorants de A, alors noté $\inf A$.

2 Borne supérieure/inférieure

Définition 1

- La borne supérieure de A est, s'il existe : le plus petit des majorants de A, alors noté $\sup A$.
- La borne inférieure de A est, s'il existe : le plus grand des minorants de A, alors noté $\inf A$.

Remarque

Si A possède un plus grand élément M, alors :

2 Borne supérieure/inférieure

Définition 1

- La borne supérieure de A est, s'il existe : le plus petit des majorants de A, alors noté $\sup A$.
- La borne inférieure de A est, s'il existe : le plus grand des minorants de A, alors noté $\inf A$.

Remarque

Si A possède un plus grand élément M, alors : $M = \sup A$

Définition 1

- La borne supérieure de A est, s'il existe : le plus petit des majorants de A, alors noté $\sup A$.
- La borne inférieure de A est, s'il existe : le plus grand des minorants de A, alors noté $\inf A$.

Remarque

Si A possède un plus grand élément M, alors : $M = \sup A$

☢ **Attention** ☢ En général : Borne sup $\neq$ P.G.E

2 Borne supérieure/inférieure

Définition 1

- La borne supérieure de A est, s'il existe : le plus petit des majorants de A, alors noté $\sup A$.
- La borne inférieure de A est, s'il existe : le plus grand des minorants de A, alors noté $\inf A$.

Remarque

Si A possède un plus grand élément M, alors : $M = \sup A$

☢ **Attention** ☢ En général : Borne sup $\neq$ P.G.E

Exemple 2

Déterminer les bornes supérieures et inférieures de :

a) $I = [2\,,3[$. b) $A = \left\{ \dfrac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

2 Borne supérieure/inférieure

Définition 1

- La borne supérieure de A est, s'il existe : le plus petit des majorants de A, alors noté $\sup A$.
- La borne inférieure de A est, s'il existe : le plus grand des minorants de A, alors noté $\inf A$.

Remarque

Si A possède un plus grand élément M, alors : $M = \sup A$

☢ **Attention** ☢ En général : Borne sup $\neq$ P.G.E

Exemple 2

Déterminer les bornes supérieures et inférieures de :

a) $I = [2\,,3[$. b) $A = \left\{ \dfrac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

2 Borne supérieure/inférieure

Théorème 2 : Propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède :
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède :

2 Borne supérieure/inférieure

Théorème 2 : Propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède : une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède :

2 Borne supérieure/inférieure

Théorème 2 : Propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède : une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède : une borne inférieure.

2 Borne supérieure/inférieure

Théorème 2 : Propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède : une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède : une borne inférieure.

Exercice 2 : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée.
Démontrer que u converge.

Théorème 2 : Propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède : une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède : une borne inférieure.

Exemple 3

Soit I un intervalle non vide.
Pour toute fonction bornée $f : I \to \mathbb{R}$, on pose : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, bornées et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Etablir :
a) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$
b) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$

Théorème 3 : Caractérisation des intervalles

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 3 : Caractérisation des intervalles

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

ii) Pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$: $[x\,, y] \subset I$

Théorème 3 : Caractérisation des intervalles

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

ii) Pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$: $[x\,, y] \subset I$

I possède les valeurs intermédiaires entre x et y

3 Borne supérieure et suites

Théorème 4

Soit M un majorant de A. Il y a équivalence entre :

i) $M = \sup A$

3 Borne supérieure et suites

Théorème 4

Soit M un majorant de A. Il y a équivalence entre :

i) $M = \sup A$

ii) il existe une suite (a_n) d'éléments de A t.q. : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

3 Borne supérieure et suites

Théorème 4

Soit M un majorant de A. Il y a équivalence entre :

i) $M = \sup A$

ii) il existe une suite (a_n) d'éléments de A t.q. : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

Exercice 3

Démontrer cette équivalence

3 Borne supérieure et suites

Théorème 4

Soit M un majorant de A. Il y a équivalence entre :

i) $M = \sup A$

ii) il existe une suite (a_n) d'éléments de A t.q. : $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$.

Exercice 4 : Borne sup « infinie »

Montrer que si A n'est pas majorée, alors il existe une suite d'éléments de A de limite $+\infty$

3 Borne supérieure et suites

Théorème 4

Soit M un majorant de A. Il y a équivalence entre :

i) $M = \sup A$

ii) il existe une suite (a_n) d'éléments de A t.q. : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

SF 13 : Utiliser les suites pour montrer que $M = \sup A$

- On montre que M majore A.
- On construit une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ t.q. : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

Exemple 4 : Déterminer les bornes supérieures et inférieures

a) $I = [2\,,3[$ b) $A = \left\{ \dfrac{q}{2^p + q}\ ;\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$

3 Borne supérieure et suites

Théorème 4

Soit M un majorant de A. Il y a équivalence entre :

i) $M = \sup A$

ii) il existe une suite (a_n) d'éléments de A t.q. : $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$.

Exemple 5

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a_n = \inf \{u_k \,;\, k \geq n\}$.
Montrer que (a_n) est croissante.

4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Notation

- On pose : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Par convention
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty$

Notation

- On pose : $\quad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Par convention
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty$

Notation

- On pose : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- Notions de borne supérieure/inférieure aussi définies dans $\overline{\mathbb{R}}$

Exemple 6

a) $\sup \mathbb{R}_+ =$ b) $\sup \varnothing =$

Par convention
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty$

Notation

- On pose : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- Notions de borne supérieure/inférieure aussi définies dans $\overline{\mathbb{R}}$

Exemple 6

a) $\sup \mathbb{R}_+ = +\infty$ b) $\sup \varnothing =$

4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Par convention
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty$

Notation

- On pose : $\quad \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- Notions de borne supérieure/inférieure aussi définies dans $\overline{\mathbb{R}}$

Exemple 6

a) $\sup \mathbb{R}_+ = +\infty$ b) $\sup \varnothing = -\infty$

4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Par convention
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty$

Notation

- On pose : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- Notions de borne supérieure/inférieure aussi définies dans $\overline{\mathbb{R}}$

Exemple 6

a) $\sup \mathbb{R}_+ = +\infty$ b) $\sup \varnothing = -\infty$

Propriété de la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Par convention
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty$

Notation

- On pose : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- Notions de borne supérieure/inférieure aussi définies dans $\overline{\mathbb{R}}$

Exemple 6

a) $\sup \mathbb{R}_+ = +\infty$ b) $\sup \varnothing = -\infty$

Propriété de la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$

Eventuellement $\pm\infty$

V Approximations d’un nombre réel

Objectif

- Approcher un réel x par :

Objectif

- Approcher un réel x par :
  1. des décimaux

Objectif

- Approcher un réel x par :
  1. des décimaux
  2. des rationnels

Objectif

- Approcher un réel x par :
  1. des décimaux
  2. des rationnels

Rappel

La *partie entière de* x est le plus grand entier inférieur ou égal à x

Inégalités à retenir

-
-

Objectif

- Approcher un réel x par :
  1. des décimaux
  2. des rationnels

Rappel

La *partie entière de* x est le plus grand entier inférieur ou égal à x

Inégalités à retenir

- $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$
-

Objectif

- Approcher un réel x par :
  1. des décimaux
  2. des rationnels

Rappel

La *partie entière de* x est le plus grand entier inférieur ou égal à x

Inégalités à retenir

- $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$
- $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}$

1 Approximation décimale

Inégalités à retenir

- $\boxed{\quad \leq x < \quad}$
- $\boxed{\quad < \lfloor x \rfloor \leq \quad}$

Rappel

Un nombre décimal est un réel de la forme :

Notation

L'ensemble des nombres décimaux est noté :

1 Approximation décimale

Inégalités à retenir

- $\boxed{\quad \leq x < \quad}$
- $\boxed{\quad < \lfloor x \rfloor \leq \quad}$

« Nombre fini de chiffres après la virgule »

Rappel

Un nombre décimal est un réel de la forme : $\dfrac{p}{10^n}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Notation

L'ensemble des nombres décimaux est noté :

1 Approximation décimale

Inégalités à retenir

- $\boxed{\quad \leq x < \quad}$
- $\boxed{\quad < \lfloor x \rfloor \leq \quad}$

« Nombre fini de chiffres après la virgule »

Rappel

Un nombre décimal est un réel de la forme : $\dfrac{p}{10^n}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Notation

L'ensemble des nombres décimaux est noté :

1 Approximation décimale

Inégalités à retenir

- $\boxed{\quad \leq x < \quad}$
- $\boxed{\quad < \lfloor x \rfloor \leq \quad}$

« Nombre fini de chiffres après la virgule »

Rappel

Un nombre décimal est un réel de la forme : $\dfrac{p}{10^n}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Notation

L'ensemble des nombres décimaux est noté : $\mathbb{D}$

1 Approximation décimale

Rappel

« Nombre fini de chiffres après la virgule »

Un nombre décimal est un réel de la forme : $\frac{p}{10^n}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Notation

L'ensemble des nombres décimaux est noté : $\mathbb{D}$

Exemple 1

On prend $x = \pi$.

a) Calculer : $y_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10}$ et $z_1 = \frac{\lfloor 10x \rfloor + 1}{10}$

b) Définir y_2 et z_2 pour que $y_2 = 3.14$ et $z_2 = 3.15$

Définition 1

- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut* est le décimal :
- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès* est le décimal :

Définition 1

- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès* est le décimal :

Définition 1

- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par excès* est le décimal : $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \quad \left(= y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$

Définition 1

- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès* est le décimal : $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \quad \left(= y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$

Théorème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1.
2.
3.

Définition 1

- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par défaut* est le décimal : $\quad y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par excès* est le décimal : $\quad z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \quad \left(= y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$

Théorème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $y_n \leq x < z_n$
2.
3.

Définition 1

- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès* est le décimal : $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ $\left(= y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$

Théorème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $y_n \leq x < z_n$
2. $z_n - y_n = \dfrac{1}{10^n}$
3.

Définition 1

- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès* est le décimal : $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \quad \left(= y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$

Théorème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $y_n \leq x < z_n$
2. $z_n - y_n = \dfrac{1}{10^n}$
3. $\begin{cases} 0 \leq z_n - x \leq \dfrac{1}{10^n} \\ 0 \leq x - y_n \leq \dfrac{1}{10^n} \end{cases}$

Définition 1

- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par excès* est le décimal : $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ $\left(= y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$

Théorème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $y_n \leq x < z_n$
2. $z_n - y_n = \dfrac{1}{10^n}$
3. $\begin{cases} 0 \leq z_n - x \leq \dfrac{1}{10^n} \\ 0 \leq x - y_n \leq \dfrac{1}{10^n} \end{cases}$

Exercice 1

Démontrer le théorème précédent.

Définition 1

- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par excès* est le décimal : $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ $\left(= y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$

Théorème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $y_n \leq x < z_n$
2. $z_n - y_n = \dfrac{1}{10^n}$
3. $\begin{cases} 0 \leq z_n - x \leq \dfrac{1}{10^n} \\ 0 \leq x - y_n \leq \dfrac{1}{10^n} \end{cases}$

Conséquence

Les suites (y_n) et (z_n) convergent vers x.

Définition 1

- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$
- L'*approximation décimale de* x *à* 10^{-n} *près par excès* est le décimal : $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ $\left(= y_n + \dfrac{1}{10^n}\right)$

Théorème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $y_n \leq x < z_n$
2. $z_n - y_n = \dfrac{1}{10^n}$
3. $\begin{cases} 0 \leq z_n - x \leq \dfrac{1}{10^n} \\ 0 \leq x - y_n \leq \dfrac{1}{10^n} \end{cases}$

Exercice 2

Montrer que les suites (y_n) et (z_n) sont adjacentes.

2 Approximation par des rationnels

Rappels

1. Les nombres rationnels sont les réels de la forme : $\dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

2 Approximation par des rationnels

Rappels

1. Les nombres rationnels sont les réels de la forme : $\dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. On dispose des inclusions suivantes : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2 Approximation par des rationnels

Rappels

1. Les nombres rationnels sont les réels de la forme : $\dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. On dispose des inclusions suivantes : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
3. Les nombres irrationnels sont les éléments de : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2 Approximation par des rationnels

Rappels

1. Les nombres rationnels sont les réels de la forme : $\dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. On dispose des inclusions suivantes : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
3. Les nombres irrationnels sont les éléments de : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorème 2

1. Tout nombre réel est :
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel *i.e.* :

2 Approximation par des rationnels

Rappels

1. Les nombres rationnels sont les réels de la forme : $\dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. On dispose des inclusions suivantes : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
3. Les nombres irrationnels sont les éléments de : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorème 2

1. Tout nombre réel est : limite d'une suite de rationnels
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel *i.e.* :

2 Approximation par des rationnels

Rappels

1. Les nombres rationnels sont les réels de la forme : $\dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. On dispose des inclusions suivantes : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
3. Les nombres irrationnels sont les éléments de : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorème 2

1. Tout nombre réel est : limite d'une suite de rationnels
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel *i.e.* : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$: $\mathbb{Q} \cap]a, b[\neq \varnothing$.

2 Approximation par des rationnels

Rappels

1. Les nombres rationnels sont les réels de la forme : $\dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. On dispose des inclusions suivantes : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
3. Les nombres irrationnels sont les éléments de : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorème 2

$\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$

1. Tout nombre réel est : limite d'une suite de rationnels
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel *i.e.* :
   pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$: $\mathbb{Q} \cap \,]a\,, b[\, \neq \varnothing$.

2 Approximation par des rationnels

Rappels

1. Les nombres rationnels sont les réels de la forme : $\dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. On dispose des inclusions suivantes : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
3. Les nombres irrationnels sont les éléments de : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorème 2

$\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$

1. Tout nombre réel est : limite d'une suite de rationnels
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel *i.e.* : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$: $\mathbb{Q} \cap]a\,, b[\neq \varnothing$.

Exercice 3

Démontrer le théorème précédent.

2 Approximation par des rationnels

Théorème 3

Tout nombre réel est :

2 Approximation par des rationnels

Théorème 3

Tout nombre réel est : limite d'une suite d'irrationnels.

2 Approximation par des rationnels

Théorème 3

Tout nombre réel est : limite d'une suite d'irrationnels.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est lui aussi *dense* dans $\mathbb{R}$

2 Approximation par des rationnels

Théorème 3

Tout nombre réel est : limite d'une suite d'irrationnels.

Exercice 4

Démontrer le théorème précédent.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est lui aussi *dense* dans $\mathbb{R}$

Théorème 4

Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

i) Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

ii) Tout intervalle ouvert non vide possède un élément de A.

2 Approximation par des rationnels

Théorème 4

A est *dense* dans $\mathbb{R}$

Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

i) Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

ii) Tout intervalle ouvert non vide possède un élément de A.

2 Approximation par des rationnels

Théorème 4

A est *dense* dans $\mathbb{R}$

Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

i) Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

ii) Tout intervalle ouvert non vide possède un élément de A.

Exercice 5

Démontrer l'implication $ii) \implies i)$ du théorème.