Rappels et compléments sur les fonctions

Chapitre 1

I Etude de fonction : rappels de terminale

Ensemble de définition

Cadre

- D est une partie de $\mathbb{R}$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Ensemble de définition

Ensemble de définition de f

Cadre

- D est une partie de $\mathbb{R}$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Ensemble de définition

Ensemble de définition de f

Cadre

- D est une partie de $\mathbb{R}$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Exemple 1

Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{\ln |x|}$.

1 Transformation affine du graphe

▸ Figure

Voir la fiche récapitulative

Définition 1

On suppose D *symétrique* par rapport à 0 :

2 Parité, imparité périodicité

Définition 1

On suppose D *symétrique* par rapport à 0 : $\forall x \in D, \quad -x \in D$

2 Parité, imparité périodicité

Définition 1

On suppose D *symétrique* par rapport à 0 : $\forall x \in D, \quad -x \in D$

- f est *paire* si :

2 Parité, imparité périodicité

Définition 1

On suppose D *symétrique* par rapport à 0 : $\forall x \in D, \quad -x \in D$

- f est *paire* si :

$$\forall x \in D, \quad f(-x) = f(x)$$

2 Parité, imparité périodicité

Définition 1

On suppose D *symétrique* par rapport à 0 : $\forall x \in D, \quad -x \in D$

- f est *paire* si :

$$\forall x \in D, \quad f(-x) = f(x)$$

- f est *impaire* si :

$$\forall x \in D, \quad f(-x) = -f(x)$$

2 Parité, imparité périodicité

Définition 1

On suppose D *symétrique* par rapport à 0 : $\forall x \in D, \quad -x \in D$

- f est *paire* si :
$$\forall x \in D, \quad f(-x) = f(x)$$
- f est *impaire* si :
$$\forall x \in D, \quad f(-x) = -f(x)$$

Exemple 2

Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ?

2 Parité, imparité périodicité

Définition 1

On suppose D *symétrique* par rapport à 0 : $\forall x \in D, \quad -x \in D$

- f est *paire* si :

$$\forall x \in D, \quad f(-x) = f(x)$$

- f est *impaire* si :

$$\forall x \in D, \quad f(-x) = -f(x)$$

Exemple 3

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2 Parité, imparité périodicité

Définition 2

Soit $T > 0$. La fonction f est T*-périodique* si :

2 Parité, imparité périodicité

Définition 2

Soit $T > 0$. La fonction f est T*-périodique* si :

$$f(x+T) = f(x)$$

2 Parité, imparité périodicité

Définition 2

Soit $T > 0$. La fonction f est T*-périodique* si :

$$\forall x \in D, \qquad f(x+T) = f(x)$$

2 Parité, imparité périodicité

Définition 2

Soit $T > 0$. La fonction f est T-*périodique* si :

$$\forall x \in D, \qquad x + T \in D \qquad \text{et} \qquad f(x+T) = f(x)$$

2 Parité, imparité périodicité

Définition 2

Soit $T > 0$. La fonction f est T*-périodique* si :

$$\forall x \in D, \qquad x + T \in D \qquad \text{et} \qquad f(x+T) = f(x)$$

Exercice 1

On suppose f T-périodique sur $\mathbb{R}$.
Soit $\omega > 0$. Déterminer une période de la fonction $g : t \mapsto f(\omega t)$

2 Parité, imparité périodicité

Définition 2

Soit $T > 0$. La fonction f est T-*périodique* si :

$$\forall x \in D, \qquad x + T \in D \qquad \text{et} \qquad f(x+T) = f(x)$$

Exercice 2

On suppose f T-périodique.
Soit $x \in D$. Trouver $y \in [0\,, T[$ tel que : $\quad f(y) = f(x)$.

3 Rappels sur la dérivation

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I
- a est un point de I.

Définition 3

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a,

3 Rappels sur la dérivation

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I
- a est un point de I.

Définition 3

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

3 Rappels sur la dérivation

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I
- a est un point de I.

Définition 3

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie quand x tend vers a.

3 Rappels sur la dérivation

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I
- a est un point de I.

Définition 3

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie quand x tend vers a.

En ce cas on pose : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

3 Rappels sur la dérivation

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I
- a est un point de I.

Définition 3

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie quand x tend vers a.

En ce cas on pose : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Formulaire à connaître

Voir, et connaître, les tableaux correspondants.

3 Rappels sur la dérivation

Définition 4

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie quand x tend vers a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Théorème 1 : Composition (rappel)

On suppose que :

i) v est dérivable sur J

3 Rappels sur la dérivation

Définition 4

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite finie quand x tend vers a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Théorème 1 : Composition (rappel)

On suppose que :

i) v est dérivable sur J

ii) u est dérivable sur I et valeurs dans J *i.e.* :

Définition 4

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite finie quand x tend vers a.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Théorème 1 : Composition (rappel)

On suppose que :

i) v est dérivable sur J

ii) u est dérivable sur I et valeurs dans J *i.e.* : $\quad \forall x \in I,\ u(x) \in J$

3 Rappels sur la dérivation

Définition 4

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite finie quand x tend vers a.

En ce cas on pose : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Théorème 1 : Composition (rappel)

On suppose que :

i) v est dérivable sur J

ii) u est dérivable sur I et valeurs dans J *i.e.* : $\forall x \in I,\ u(x) \in J$

alors $v \circ u$ est dérivable sur I et : $\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$

3 Rappels sur la dérivation

Théorème 1 : Composition (rappel)

On suppose que :

i) v est dérivable sur J

ii) u est dérivable sur I et valeurs dans J *i.e.* : $\forall x \in I,\ u(x) \in J$

alors $v \circ u$ est dérivable sur I et : $\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$

SF 5 : justifier la dérivabilité d'une composée

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$

b) Trouver un ensemble sur lequel f est dérivable

Théorème 2

On suppose f dérivable sur I.

- f est croissante sur I ssi :

3 Rappels sur la dérivation

Théorème 2

On suppose f dérivable sur I.

- f est croissante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0.$

Théorème 2

On suppose f dérivable sur I.

- f est croissante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0.$
- f est constante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

3 Rappels sur la dérivation

Théorème 2

On suppose f dérivable sur I.

- f est croissante sur I ssi : $\quad \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0.$
- f est constante sur I ssi : $\quad \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$
- *Condition suffisante de stricte monotonie :*

Théorème 2

On suppose f dérivable sur I.

- f est croissante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0.$
- f est constante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0.$
- *Condition suffisante de stricte monotonie :*
  Si $f' \geq 0$ sur I et si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I

Théorème 2

On suppose f dérivable sur I.

- f est croissante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0.$
- f est constante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0.$
- *Condition suffisante de stricte monotonie :*
  Si $f' \geq 0$ sur I et si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I

Exemple 4

Montrer que la fonction $f : x \mapsto 2x + \cos(2x)$ est strictement croissante sur $[0\,,2\pi]$.

3 Rappels sur la dérivation

Théorème 2

On suppose f dérivable sur I.

- f est croissante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0.$
- f est constante sur I ssi : $\forall x \in I,\ f'(x) = 0.$
- *Condition suffisante de stricte monotonie :*
  Si $f' \geq 0$ sur I et si f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante sur I

Exemple 5 : Un raisonnement par analyse-synthèse

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(y) = (x - y)f'(\frac{x + y}{2})$$

II Convexité

1 Définition et position par rapport aux cordes

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I

Définition 1

La fonction f est convexe si pour tous $a, b \in I$:

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I

Définition 1

La fonction f est convexe si pour tous $a, b \in I$:

$$\forall t \in [0\,,1], \quad f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

1 Définition et position par rapport aux cordes

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I

Définition 1

La fonction f est convexe si pour tous $a, b \in I$:

$$\forall t \in [0\,,1], \quad f\big(\underbrace{(1-t)a + tb}_{\text{décrit } [a\,,b] \text{ lorsque } t \text{ décrit } [0\,,1]}\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

1 Définition et position par rapport aux cordes

Cadre

- I est un intervalle
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I

Définition 1

La fonction f est convexe si pour tous $a, b \in I$:

$$\forall t \in [0\,,1], \quad f\big((1-t)a + tb \big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

décrit $[a\,,b]$ lorsque
t décrit $[0\,,1]$

Géométriquement

$\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes.

1 Définition et position par rapport aux cordes

Définition 1

La fonction f est convexe si pour tous $a, b \in I$:

$$\forall t \in [0\,,1], \quad f\big(\underbrace{(1-t)a + tb}_{\text{décrit } [a\,,b] \text{ lorsque } t \text{ décrit } [0\,,1]}\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Géométriquement

$\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes.

Exemple 1

Etablir : $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} \leq \frac{e^{2a}+e^{2b}}{2}$.

1 Définition et position par rapport aux cordes

Définition 1

La fonction f est convexe si pour tous $a, b \in I$:

$$\forall t \in [0\,,1], \quad f\left((1-t)a+tb\right) \leq (1-t)f(a)+tf(b)$$

Géométriquement

$\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes.

Remarque

La fonction f est concave si :

$$\forall a, b \in I, \quad \forall t \in [0\,,1], \quad f\left((1-t)a+tb\right) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$$

2 Caractérisations de la convexité

Remarque

La fonction f est concave si

$$\forall t \in [a\,,b], \quad f\left((1-t)a+tb\right) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$$

Théorème 1

Il y a équivalence entre :

i) f est convexe sur I

Remarque

La fonction f est concave si

$$\forall t \in [a\,,b], \quad f\left((1-t)a + tb\right) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Théorème 1

Il y a équivalence entre :

i) f est convexe sur I

ii) Pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

2 Caractérisations de la convexité

Remarque

La fonction f est concave si

$$\forall t \in [a\,,b], \quad f((1-t)a+tb) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$$

Théorème 1

Il y a équivalence entre :

i) f est convexe sur I

ii) Pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

fonction taux d'accroissement de f en a

2 Caractérisations de la convexité

Théorème 1

Il y a équivalence entre :

i) f est convexe sur I

ii) Pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

fonction taux d'accroissement de f en a

Exercice 1

Démontrer cette équivalence.

Théorème 1

Il y a équivalence entre :

i) f est convexe sur I

ii) Pour tout $a \in I$, la fonction $\underbrace{\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

fonction taux d'accroissement de f en a

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Théorème 2

- On suppose f dérivable sur I.
  f est convexe ssi :
- On suppose f deux fois dérivable sur I.
  f est convexe ssi :

Théorème 2

- On suppose f dérivable sur I.
  f est convexe ssi : f' est croissante sur I
- On suppose f deux fois dérivable sur I.
  f est convexe ssi :

Théorème 2

- On suppose f dérivable sur I.
  f est convexe ssi : f' est croissante sur I
- On suppose f deux fois dérivable sur I.
  f est convexe ssi : $f'' \geq 0$ sur I

Théorème 2

- On suppose f dérivable sur I.
  f est convexe ssi : f' est croissante sur I
- On suppose f deux fois dérivable sur I.
  f est convexe ssi : $f'' \geq 0$ sur I

Inégalité des cordes

On suppose f convexe sur I. Soit $a, b \in I$, distincts.

Pour tout x entre a et b :

3 Inégalités de convexité

Théorème 2

- On suppose f dérivable sur I.
  f est convexe ssi : f' est croissante sur I
- On suppose f deux fois dérivable sur I.
  f est convexe ssi : $f'' \geq 0$ sur I

Inégalité des cordes

On suppose f convexe sur I. Soit $a, b \in I$, distincts.

Pour tout x entre a et b : $\boxed{f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$

3 Inégalités de convexité

Inégalité des cordes

On suppose f convexe sur I. Soit $a, b \in I$, distincts.

Pour tout x entre a et b : $\boxed{f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$

Théorème 3

On suppose f dérivable sur I. Si f est convexe sur I, alors le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
Pour tous $a, x \in I$:

3 Inégalités de convexité

Inégalité des cordes

On suppose f convexe sur I. Soit $a, b \in I$, distincts.

Pour tout x entre a et b : $\boxed{f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$

Théorème 3

On suppose f dérivable sur I. Si f est convexe sur I, alors le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
Pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$

3 Inégalités de convexité

Inégalité des cordes

On suppose f convexe sur I. Soit $a, b \in I$, distincts.

Pour tout x entre a et b : $\boxed{f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$

Théorème 3

On suppose f dérivable sur I. Si f est convexe sur I, alors le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
Pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$

Théorème 4 : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in I$

et $t_1, \ldots, t_n \in [0\,, 1]$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$:

3 Inégalités de convexité

Inégalité des cordes

On suppose f convexe sur I. Soit $a, b \in I$, distincts.

Pour tout x entre a et b : $\boxed{f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$

Théorème 3

On suppose f dérivable sur I. Si f est convexe sur I, alors le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
Pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$

Théorème 4 : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $a_1, \dots, a_n \in I$ et $t_1, \dots, t_n \in [0\,, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$: $\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)}$

Théorème 4 : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in I$ et $t_1, \ldots, t_n \in [0\,,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$: $\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)}$

Théorème 4 : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in I$ et $t_1, \ldots, t_n \in [0\,,1]$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$: $\boxed{f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)}$

Cas particulier important

Avec $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \dfrac{1}{n}$:

3 Inégalités de convexité

Théorème 4 : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in I$ et $t_1, \ldots, t_n \in [0\,,1]$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$: $\boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)}$

Cas particulier important

Avec $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \dfrac{1}{n}$:

$$\boxed{f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)}$$

Théorème 4 : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $a_1, \dots, a_n \in I$ et $t_1, \dots, t_n \in [0\,,1]$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$: $\boxed{f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)}$

Cas particulier important

Avec $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \dfrac{1}{n}$:

$$\boxed{f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)}$$

Exemple 3 : Inégalité arithmético-géométrique

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Etablir : $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$

III Fonctions trigonométriques

Rappel

Soit $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x *est congru à* y *modulo* α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\quad x = y + k\alpha.$

Notation

On note alors : $\quad x \equiv y \ [\alpha]$

Exemple 1 : Modulo 2π

a) $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \qquad [2\pi]$

b) $8\pi \equiv \quad [2\pi]$

c) $15\pi \equiv \quad [2\pi]$

d) $\dfrac{11\pi}{3} \equiv \qquad\qquad [2\pi]$

Rappels

Rappel

Soit $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x *est congru à* y *modulo* α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\quad x = y + k\alpha.$

Notation

On note alors : $\quad x \equiv y \; [\alpha]$

Exemple 1 : Modulo 2π

a) $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{3\pi}{2} \quad [2\pi]$

b) $8\pi \equiv \quad [2\pi]$

c) $15\pi \equiv \quad [2\pi]$

d) $\dfrac{11\pi}{3} \equiv \qquad [2\pi]$

Rappels

Rappel

Soit $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x *est congru à* y *modulo* α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\quad x = y + k\alpha.$

Notation

On note alors : $\quad x \equiv y\ [\alpha]$

Exemple 1 : Modulo 2π

a) $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

b) $8\pi \equiv 0\ [2\pi]$

c) $15\pi \equiv \quad [2\pi]$

d) $\dfrac{11\pi}{3} \equiv \qquad\qquad [2\pi]$

Rappel

Soit $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x *est congru à* y *modulo* α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = y + k\alpha$.

Notation

On note alors : $x \equiv y\ [\alpha]$

Exemple 1 : Modulo 2π

a) $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

b) $8\pi \equiv 0\ [2\pi]$

c) $15\pi \equiv \pi\ [2\pi]$

d) $\dfrac{11\pi}{3} \equiv \qquad\qquad [2\pi]$

Rappel

Soit $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x *est congru à* y *modulo* α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\quad x = y + k\alpha.$

Notation

On note alors : $\quad x \equiv y\ [\alpha]$

Exemple 1 : Modulo 2π

a) $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

b) $8\pi \equiv 0\ [2\pi]$

c) $15\pi \equiv \pi\ [2\pi]$

d) $\dfrac{11\pi}{3} \equiv -\dfrac{\pi}{3} \equiv \dfrac{5\pi}{3}\ [2\pi]$

1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

Exemple 1 : Modulo 2π

a) $-\dfrac{\pi}{2} \equiv \dfrac{3\pi}{2} \ [2\pi]$

b) $8\pi \equiv 0 \ [2\pi]$

c) $15\pi \equiv \pi \ [2\pi]$

d) $\dfrac{11\pi}{3} \equiv -\dfrac{\pi}{3} \equiv \dfrac{5\pi}{3} \ [2\pi]$

Exemple 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos\theta - u_n$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \cos(n\theta)$.

Théorème 1 : Propriétés

1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

Théorème 1 : Propriétés

i) cos et sin sont 2π-périodiques

Théorème 1 : Propriétés

i) cos et sin sont 2π-périodiques

ii) cos est paire, sin est impaire.

Théorème 1 : Propriétés

i) cos et sin sont 2π-périodiques

ii) cos est paire, sin est impaire.

iii) sin et cos sont dérivables et $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Théorème 1 : Propriétés

i) cos et sin sont 2π-périodiques

ii) cos est paire, sin est impaire.

iii) sin et cos sont dérivables et $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:

1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

Théorème 1 : Propriétés

i) cos et sin sont 2π-périodiques

ii) cos est paire, sin est impaire.

iii) sin et cos sont dérivables et $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:

1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

Théorème 1 : Propriétés

i) cos et sin sont 2π-périodiques

ii) cos est paire, sin est impaire.

iii) sin et cos sont dérivables et $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:

  il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:

  il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Théorème 3

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$\cos\theta = \cos\varphi \Leftrightarrow$

Théorème 4

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$\sin\theta = \sin\varphi \Leftrightarrow$

1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:

  il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Théorème 3

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \cos\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi [2\pi] \\ \text{ou} \\ \\ \end{cases}$$

Théorème 4

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\sin\theta = \sin\varphi \Leftrightarrow$$

1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:

  il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Théorème 3

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \cos\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -\varphi[2\pi] \end{cases}$$

Théorème 4

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\sin\theta = \sin\varphi \Leftrightarrow$$

Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:

  il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Théorème 3

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \cos\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -\varphi[2\pi] \end{cases}$$

Théorème 4

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\sin\theta = \sin\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \end{cases}$$

Théorème 2 : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Réciproquement, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 = 1$:

  il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Théorème 3

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \cos\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi [2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -\varphi [2\pi] \end{cases}$$

Théorème 4

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\sin\theta = \sin\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi [2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv \pi - \varphi [2\pi] \end{cases}$$

1 Rappels sur les fonctions cosinus et sinus

Théorème 3

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\cos\theta = \cos\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -\varphi[2\pi] \end{cases}$$

Théorème 4

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\sin\theta = \sin\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv \pi - \varphi[2\pi] \end{cases}$$

Exemple 3

Résoudre l'équation $\cos x = \sin x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 5 : Réduction de $a \cos t + b \sin t$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On peut trouver un réel φ tel que :

Théorème 5 : Réduction de $a \cos t + b \sin t$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On peut trouver un réel φ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi)$$

Théorème 5 : Réduction de $a\cos t + b\sin t$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On peut trouver un réel φ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(t - \varphi)$$

Exercice 1

Démontrer le théorème en commençant par factoriser $a\cos t + b\sin t$ par $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Théorème 5 : Réduction de $a \cos t + b \sin t$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On peut trouver un réel φ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi)$$

Exemple 4

Trouver A et φ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2} \cos t + \sqrt{6} \sin t = A \cos(t - \varphi)$$

Théorème 5 : Réduction de $a \cos t + b \sin t$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On peut trouver un réel φ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi)$$

Exemple 5

Résoudre l'équation $\quad \cos t + \sin t = 1 \quad$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.

2 la fonction tangente

Définition 1

La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

par : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$

2 la fonction tangente

réels qui annulent cos

Définition 1

La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

par : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$

2 la fonction tangente

réels qui annulent cos

Définition 1

La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

par : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$

Théorème 6

i) tan est π-périodique.

2 la fonction tangente

réels qui annulent cos

Définition 1

La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}\right\}$

par : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$

Théorème 6

i) tan est π-périodique.

ii) tan est impaire

2 la fonction tangente

réels qui annulent cos

Définition 1

La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

par : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$

Théorème 6

i) tan est π-périodique.

ii) tan est impaire

iii) tan est dérivable sur D et : $\boxed{\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2}$

2 la fonction tangente

réels qui annulent cos

Définition 1

La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$

par : $$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

Théorème 6

i) tan est π-périodique.

ii) tan est impaire

iii) tan est dérivable sur D et : $\boxed{\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2}$

Exercice 2

a) Prouver le point *iii)* b) Démontrer la formule sur $\tan(a+b)$