Rappels sur les inégalités

Chapitre 0

I Manipuler des inégalités

1 Inégalités et opérations

Théorème 1 : Inégalités et opérations

Soient $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$.

- *Addition.* si $a \leq b$ et $c \leq d$: $\quad a + c \leq b + d$.
- *Multiplication.*
  - *par un réel positif.* Si $a \leq b$ et $k \geq 0$: $\quad ka \leq kb$.
  - *par un réel négatif.* Si $a \leq b$ et $k \leq 0$: $\quad ka \geq kb$
  - *d'inégalités positives.* Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$: $0 \leq ac \leq bd$
- *Inverse.* Si $0 < a \leq b$: $\quad 0 < \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.

1 Inégalités et opérations

SF 1 : majorer une fraction de réels positifs

Il suffit de majorer le numérateur et minorer le dénominateur.

Exemple 1

Montrer que pour tout $x \in [0\,,2]$: $\dfrac{1}{7} \leq \dfrac{x+1}{x^2+3} \leq 1$

SF 1 : majorer une fraction de réels positifs

Il suffit de majorer le numérateur et minorer le dénominateur.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{x+1}{x-1} \leq \dfrac{x-2}{x+2}$

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| =$

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |x| \geq 0 \quad$ et $\quad |x| = 0$ ssi $x = 0$.

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ ssi $x = 0$.
- *Inégalités sur $|x|$.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |x| \geq 0 \quad$ et $\quad |x| = 0$ ssi $x = 0$.
- *Inégalités sur* $|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -|x| \leq x \leq |x|$.
- *Règles de calcul.*

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |x| \geq 0 \quad$ et $\quad |x| = 0$ ssi $x = 0$.
- *Inégalités sur* $|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -|x| \leq x \leq |x|$.
- *Règles de calcul.*
  - $|-x| = |x|$

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |x| \geq 0 \quad$ et $\quad |x| = 0$ ssi $x = 0$.
- *Inégalités sur* $|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -|x| \leq x \leq |x|$.
- *Règles de calcul.*
  - $|-x| = |x|$
  - $|xy| = |x|\,|y|$

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |x| \geq 0 \quad$ et $\quad |x| = 0$ ssi $x = 0$.
- *Inégalités sur $|x|$.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -|x| \leq x \leq |x|$.
- *Règles de calcul.*
  - $|-x| = |x|$
  - $|xy| = |x|\,|y|$
- *Inégalité triangulaire.* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ ssi $x = 0$.
- *Inégalités sur* $|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-|x| \leq x \leq |x|$.
- *Règles de calcul.* ▪ $|-x| = |x|$ ▪ $|xy| = |x|\,|y|$
- *Inégalité triangulaire.* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ ssi $x = 0$.
- *Inégalités sur* $|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-|x| \leq x \leq |x|$.
- *Règles de calcul.*
  - $|-x| = |x|$
  - $|xy| = |x|\,|y|$
- *Inégalité triangulaire.* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

SF 3 : Résoudre une inéquation avec des valeurs absolues

On distingue des cas pour éliminer les valeurs absolues.

Exemple 3

Résoudre l'inéquation $|2-x| + |2x+4| \leq 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2 Valeur absolue

Définition 1

- *Définition.* La *valeur absolue* de x est : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |x| \geq 0 \quad$ et $\quad |x| = 0$ ssi $x = 0$.
- *Inégalités sur* $|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -|x| \leq x \leq |x|$.
- *Règles de calcul.*
  - $|-x| = |x|$
  - $|xy| = |x|\,|y|$
- *Inégalité triangulaire.* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad |x + y| \leq |x| + |y|$.

Exemple 4

Etablir, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $|x - y| \leq |x| + |y|$

b) $|x - y| \geq |x| - |y|$

c) $|x - y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big|$

2 Valeur absolue

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $-r \leq x \leq r$.
- $|x - a| \leq r$ ssi :

2 Valeur absolue

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $-r \leq x \leq r$.
- $|x - a| \leq r$ ssi : $x \in$

2 Valeur absolue

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $\quad -r \leq x \leq r.$
- $|x - a| \leq r$ ssi : $\quad x \in [a - r\,, a + r]$

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $-r \leq x \leq r$.
- $|x - a| \leq r$ ssi : $x \in [a - r\,, a + r]$

Lien avec la racine carrée Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $a \geq 0$

- $\sqrt{x^2} =$
- $x^2 = a$ ssi
- $x^2 \leq a$ ssi

2 Valeur absolue

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $-r \leq x \leq r$.
- $|x - a| \leq r$ ssi : $x \in [a - r\,, a + r]$

Lien avec la racine carrée Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $a \geq 0$

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $x^2 = a$ ssi
- $x^2 \leq a$ ssi

2 Valeur absolue

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $-r \leq x \leq r$.
- $|x - a| \leq r$ ssi : $x \in [a - r\,, a + r]$

Lien avec la racine carrée Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $a \geq 0$

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $x^2 = a$ ssi $|x| = \sqrt{a}$
- $x^2 \leq a$ ssi

2 Valeur absolue

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $-r \leq x \leq r$.
- $|x - a| \leq r$ ssi : $x \in [a - r\,, a + r]$

Lien avec la racine carrée Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $a \geq 0$

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $x^2 = a$ ssi $|x| = \sqrt{a}$ *i.e.* $x = \pm\sqrt{a}$
- $x^2 \leq a$ ssi

2 Valeur absolue

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $\quad -r \leq x \leq r.$
- $|x - a| \leq r$ ssi : $\quad x \in [a - r\,, a + r]$

Lien avec la racine carrée Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $a \geq 0$

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $x^2 = a$ ssi $\quad |x| = \sqrt{a} \quad$ *i.e.* $\quad x = \pm\sqrt{a}$
- $x^2 \leq a$ ssi $\quad -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$

Théorème 2 : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| \leq r$ si et seulement si : $-r \leq x \leq r$.
- $|x-a| \leq r$ ssi : $x \in [a-r\,, a+r]$

Lien avec la racine carrée Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $a \geq 0$

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $x^2 = a$ ssi $|x| = \sqrt{a}$ *i.e.* $x = \pm\sqrt{a}$
- $x^2 \leq a$ ssi $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$

Exemple 5

Résoudre l'inéquation : $2x \leq \sqrt{x^2+1}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de x* est le plus :

- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi :

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de* x est le plus : grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi :

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de* x est le plus : grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi : $\begin{cases} n \leq x & ① \\ & ② \end{cases}$

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de* x est le plus : grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi : $\begin{cases} n \leq x & ① \\ n+1 > x & ② \end{cases}$

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de* x est le plus : grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi : $\begin{cases} n \leq x & ① \\ n + 1 > x & ② \end{cases}$

Inégalités à retenir

1. $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$ 2. $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}$

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de* x est le plus : grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi : $\begin{cases} n \leq x & ① \\ n+1 > x & ② \end{cases}$

Inégalités à retenir

1. $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$
2. $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}$

Exemple 6

a) $\lfloor 3.745 \rfloor =$ $\qquad$ $\lfloor -2.1 \rfloor =$

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de x* est le plus : grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi : $\begin{cases} n \leq x & ① \\ n+1 > x & ② \end{cases}$

Inégalités à retenir

1. $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$ 2. $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}$

Exemple 6

a) $\lfloor 3.745 \rfloor = 3 \qquad \lfloor -2.1 \rfloor =$

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de* x est le plus : grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi : $\begin{cases} n \leq x & ① \\ n+1 > x & ② \end{cases}$

Inégalités à retenir

1. $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$
2. $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}$

Exemple 6

a) $\lfloor 3.745 \rfloor = 3 \qquad \lfloor -2.1 \rfloor = -3$

3 Partie entière d'un réel x

Définition 2

- La *partie entière de x* est le plus : grand entier inférieur ou égal à x. On le note $\lfloor x \rfloor$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\quad n = \lfloor x \rfloor$ ssi : $\begin{cases} n \leq x & ① \\ n+1 > x & ② \end{cases}$

Inégalités à retenir

1. $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$ 2. $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}$

Exemple 6

a) $\lfloor 3.745 \rfloor = 3 \qquad \lfloor -2.1 \rfloor = -3$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

II Fonctions et inégalités

1 Fonctions monotones

Définition 1

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:

1 Fonctions monotones

Définition 1

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:

1 Fonctions monotones

Jamais sur une copie

Définition 1

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:

1 Fonctions monotones

Définition 1

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x < y \implies f(x) < f(y)$.
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:

1 Fonctions monotones

Définition 1

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x < y \implies f(x) < f(y)$.
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:

1 Fonctions monotones

Définition 1

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x < y \implies f(x) < f(y)$.
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x < y \implies f(x) > f(y)$.

1 Fonctions monotones

Définition 1

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x < y \implies f(x) < f(y)$.
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$:
  $x < y \implies f(x) > f(y)$.

Exemple 1

Montrer que pour tout $x > 0$:
a) $\ln(x+1) - \ln(x) \geq 0$ b) $(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) \geq 0$

1 Fonctions monotones

Théorème 1

Si f et g sont croissantes sur D, alors :

1 Fonctions monotones

Théorème 1

Si f et g sont croissantes sur D, alors : $f + g$ est croissante sur D

1 Fonctions monotones

résultat analogue lorsque
f et g sont décroissantes

Théorème 1

Si f et g sont croissantes sur D, alors : $f + g$ est croissante sur D

résultat analogue lorsque
f et g sont décroissantes

Théorème 1

Si f et g sont croissantes sur D, alors : $f + g$ est croissante sur D

Exercice 1

Démontrer ce théorème.

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2

f est dite :

- *majorée* si : $f(x) \leq M$
- *minorée* si :
- *bornée* si :

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2

f est dite :

- *majorée* si : $\forall x \in D, \quad f(x) \leq M$
- *minorée* si :
- *bornée* si :

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2

f est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \leq M$
- *minorée* si :
- *bornée* si :

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2

f est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \leq M$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \geq m$
- *bornée* si :

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2

f est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \leq M$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \geq m$
- *bornée* si : elle est majorée et minorée.

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2

f est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \leq M$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \geq m$
- *bornée* si : elle est majorée et minorée.
  C'est équivalent à : $\exists K \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in D, \quad |f(x)| \leq K.$

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2

f est dite :

- *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \leq M$
- *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, \quad f(x) \geq m$
- *bornée* si : elle est majorée et minorée.
  C'est équivalent à : $\exists K \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in D, \quad |f(x)| \leq K$.

Exercice 2

Démontrer l'équivalence de la définition 2.

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 3

f possède un maximum en a si :

2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 3

f possède un maximum en a si : $\quad \forall x \in D, \quad f(x) \leq f(a)$

Définition 3

f possède un maximum en a si : $\quad \forall x \in D, \quad f(x) \leq f(a)$

Notation

On note : $\quad f(a) = \max_{x \in D} f(x) \quad$ ou $\quad f(a) = \max_D f$.

Définition 3

f possède un maximum en a si : $\forall x \in D, \quad f(x) \leq f(a)$

Notation

On note : $f(a) = \max\limits_{x \in D} f(x)$ ou $f(a) = \max\limits_{D} f$.

Exemple 2

Montrer que pour tout $x \in [0, 2]$: $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x+1}{x^2+3} \leq \dfrac{1}{2}$.

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Exemple 3

a) Montrer que pour tout $x > -1$: $\ln(1 + x) \leq x$.

b) Interpréter graphiquement cette inégalité.

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Exemple 3

a) Montrer que pour tout $x > -1$: $\quad \ln(1+x) \leq x$.

b) Interpréter graphiquement cette inégalité.

Exemple 4

Montrer que pour tout $x \in \,]0\,,1[\,\cup\,]1\,,+\infty[$: $\quad \dfrac{x+1}{x-1}\ln x \geq 2$.

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Cadre

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I

Théorème 2 : Cas d'une fonction convexe

Si f' est croissante sur I :

- Pour tous $a, x \in I$:

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Cadre

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I

équation de la tangente à f en a

Théorème 2 : Cas d'une fonction convexe

Si f' est croissante sur I :

- Pour tous $a, x \in I$: $\boxed{f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)}$

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Cadre

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I

équation de la tangente à f en a

Théorème 2 : Cas d'une fonction convexe

Si f' est croissante sur I :

- Pour tous $a, x \in I$: $\boxed{f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)}$
- Pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$

  et tout $x \in [a\,, b]$:

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Cadre

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I

Théorème 2 : Cas d'une fonction convexe

Si f' est croissante sur I :

- Pour tous $a, x \in I$: $\boxed{f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)}$

  équation de la tangente à f en a

- Pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$

  et tout $x \in [a\,,b]$: $\boxed{f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Cadre

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I

équation de la tangente à f en a

Théorème 2 : Cas d'une fonction convexe

Si f' est croissante sur I :

- Pour tous $a, x \in I$: $\boxed{f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)}$
- Pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$

  et tout $x \in [a\,,b]$: $\boxed{f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$

équation de la corde

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Cadre

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I

équation de la tangente à f en a

Théorème 2 : Cas d'une fonction convexe

Si f' est croissante sur I :

- Pour tous $a, x \in I$: $\boxed{f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)}$
- Pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$

  et tout $x \in [a\,, b]$: $\boxed{f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$

équation de la corde

Exercice 3

Démontrer le premier point.

3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

SF 7 : Etablir une inégalité du type « $\forall x \in D, \quad f(x) \leq g(x)$ »

Lorsque f est dérivable et convexe :

- Tangentes : $\quad \forall a, x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$
- Cordes : $\quad \forall x \in [a\,,b], \quad f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Exemple 5

Etablir :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1+x$

b) $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$

c) $\forall x \in [0\,,\frac{\pi}{2}], \quad \sin x \geq \dfrac{2x}{\pi}$

Quelques règles de rédaction autour des fonctions

Ne pas confondre f et $f(x)$

Mal
la fonction $f(x) = e^{2x} + 1$
$f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\left(e^{2x} + 1\right)' = 2e^{2x}$

Bien
la fonction $f : x \mapsto e^{2x} + 1$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = 2e^{2x}$

Quelques règles de rédaction autour des fonctions

Ne pas confondre f et $f(x)$

Mal
la fonction $f(x) = e^{2x} + 1$
$f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
$\left(e^{2x} + 1\right)' = 2e^{2x}$

Bien
la fonction $f : x \mapsto e^{2x} + 1$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = 2e^{2x}$

☢ et pas : $f(x)'$ ☢

III Raisonnements par récurrence

Notations

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $[\![a\,,b]\!] =$

☢ Attention ☢

L'intervalle $[\![a\,,b]\!]$ possède : éléments.

Notations

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $\llbracket a\,, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$

☢ Attention ☢

L'intervalle $\llbracket a\,, b \rrbracket$ possède : éléments.

Notations

ensemble des entiers compris entre a et b

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $[\![a\,,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$

☢ Attention ☢

L'intervalle $[\![a\,,b]\!]$ possède : éléments.

Notations

ensemble des entiers
compris entre a et b

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $[\![a\,,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$

☢ Attention ☢

L'intervalle $[\![a\,,b]\!]$ possède : $b - a + 1$ éléments.

Notations

ensemble des entiers compris entre a et b

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $\quad [\![a\,,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$

☢ Attention ☢

L'intervalle $[\![a\,,b]\!]$ possède : $\quad b - a + 1 \quad$ éléments.

Définition 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle n* l'entier

Notations

ensemble des entiers
compris entre a et b

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $[\![a\,,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$

☢ Attention ☢

L'intervalle $[\![a\,,b]\!]$ possède : $b - a + 1$ éléments.

Définition 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle* n l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

Notations

ensemble des entiers compris entre a et b

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $\llbracket a\,, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$

Attention

L'intervalle $\llbracket a\,, b \rrbracket$ possède : $b - a + 1$ éléments.

Définition 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle* n l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

- Par convention : $0! = 1$

Notations

ensemble des entiers
compris entre a et b

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $\quad [\![a\,,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$

☢ Attention ☢

L'intervalle $[\![a\,,b]\!]$ possède : $\quad b - a + 1 \quad$ éléments.

Définition 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle n* l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

- Par convention : $\quad 0! = 1$
- *Relation de récurrence.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Notations

ensemble des entiers compris entre a et b

Intervalles d'entiers

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ on pose : $[\![a\,, b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$

☢ Attention ☢

L'intervalle $[\![a\,, b]\!]$ possède : $b - a + 1$ éléments.

Définition 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle* n l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

- Par convention : $0! = 1$
- *Relation de récurrence.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Notations

Définition 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle n* l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$

- Par convention : $0! = 1$
- *Relation de récurrence.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Exemple 1

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.
Ecrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles :

a) $A = (p+1) \times (p+2) \times \cdots \times (p+n)$.

b) $B = 2 \times 4 \times \cdots \times 2p$.

c) $C = 1 \times 3 \times \cdots \times (2p+1)$.

1 Récurrence simple

Cadre : P désigne une propriété qui s'applique aux entiers naturels.

Le principe de récurrence

Si
- $P(0)$ est vraie
- P est « héréditaire » *i.e.* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (P(n) \implies P(n+1))$$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |\sin(nx)| \leq n\,|\sin x|$.

2 Variantes du principe de récurrence

Principe de récurrence double

Si :

- $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (P(n) \text{ et } P(n+1)) \implies P(n+2)$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n \geq n$.

2 Variantes du principe de récurrence

Principe de récurrence double

Si :
- $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (P(n) \text{ et } P(n+1)) \implies P(n+2)$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 1 \leq u_n \leq n^2$.

Principe de récurrence forte

Si :
- $P(0)$ est vraie
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big) \implies P(n+1)$

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que $u_0 = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \leq 2^n$.

IV Inégalité des accroissements finis

Théorème 1 : Admis provisoirement

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On suppose que f' est bornée sur I

Alors :

Théorème 1 : Admis provisoirement

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On suppose que f' est bornée sur I il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad \left|f'(x)\right| \leq k$$

Alors :

1 L'inégalité des accroissements finis

Théorème 1 : Admis provisoirement

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On suppose que f' est bornée sur I il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k$$

Alors : $\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|.$

Théorème 1 : Admis provisoirement

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On suppose que f' est bornée sur I il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k$$

Alors : $\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$.

f est k-lipschitzienne

▸ Figure

Théorème 1 : Admis provisoirement

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On suppose que f' est bornée sur I il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k$$

Alors : $\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|.$

Exemple 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne sur $[0\,, 1]$.

1 L'inégalité des accroissements finis

Théorème 1 : Admis provisoirement

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On suppose que f' est bornée sur I il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k$$

Alors : $\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$.

Exemple 2

a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

2 Notions sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 1

Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par f si $\quad f(I) \subset I \quad$ *i.e.* :

Définition 1

Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$ *i.e.* :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I$$

2 Notions sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 1

Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$ *i.e.* :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I$$

$$f(I) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x) \; ; \; x \in I\}$$

2 Notions sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 1

Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$ *i.e.* :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I$$

$$f(I) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\ ;\ x \in I\}$$

En pratique

Si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans I.

2 Notions sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 1

Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$ *i.e.* :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I$$

$$f(I) \underset{\text{déf.}}{=} \{f(x)\ ;\ x \in I\}$$

En pratique

Si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans I.

Exemple 3

On cherche à définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation : $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie si $u_0 \notin [-2\,,2]$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si $u_0 \in [-2\,,2]$.

2 Notions sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 2 : Critère « $f(\ell) = \ell$ »

Si (u_n) converge vers $\ell \in D$ et si f est continue en ℓ , alors ℓ est un *point fixe* de f : $\quad f(\ell) = \ell$

3 Application à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple 4

Soit $u_0 \in [0\,,1]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[0\,,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0\,,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.