I Vocabulaire de base

1 Généralités

Définition 1

Une *suite* réelle est :

Notation indicielle	
l'application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$	**la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'image de n par u	u_n
la suite u	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
l'ensemble des suites réelles	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

• **Généralisation.** Etant donné deux ensembles I et E, une *famille d'éléments de E indexée par I* est une application de I dans E, notée sous la forme $(u_i)_{i\in I}$. L'ensemble des familles de E indexées par I est noté E^I.

2 Définitions liées à l'ordre

Définition 2

Une suite réelle u est dite :
- *majorée* si :
- *minorée* si :
- *bornée* si :

Exemple 1 — Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{3 - \cos n}$ est bornée.

SF 3 : Majorer une somme

Exemple 2 — Soit $q \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+q^k)$. Montrer que u est majorée.

Théorème 1

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est bornée et si v converge vers 0, alors :

Exemple 3 — La suite $\left(\dfrac{\sin n}{n}\right)$ converge vers 0 car :

Définition 3

Une suite réelle u est dite :
- *croissante* si :
- *décroissante* si :
- *strictement croissante* si :
- *strictement décroissante* si :
- *(strictement) monotone* si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

SF 4 : Deux méthodes pour montrer qu'une suite est monotone

Exemple 4 — Etudier la monotonie des suites de termes généraux :

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ **b)** $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{2k^2}\right)$ **c)** $w_n = \dfrac{e^n}{n!}$ **d)** $x_n = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ **e)** $y_n = \sum_{k=n+1}^{np} \dfrac{1}{k}$ (où $p \geq 2$)

3 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soient $q, r \in \mathbb{C}$.
- On dit que u est *arithmétique de raison r* si :

  Le terme général est alors donné par :
- On dit que u est *géométrique de raison q* si :

  Le terme général est alors donné par :

Théorème 2 : Limite d'une suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}$	$q > 1$	$q = 1$	$\lvert q\rvert < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n\to+\infty} q^n$				