Théorème 4

Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

Démonstration.

Cas d'une suite réelle.

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, bornée. Il existe donc $a < b$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leq u_n \leq b$.
On procède en trois étapes pour construire une sous-suite convergente de u :

- *Etape 1 : Construction d'une suite de segments emboîtés.* Par récurrence sur n, on construit une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments emboîtés (*i.e.* $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n$) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $(H_1) : b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

  $(H_2) : I_n$ contient une infinité de termes de la suite *i.e.* l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid u_i \in I_n\}$ est infini.

  - *Pour n=0.* On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Le segment $I_0 = [a, b]$ vérifie évidemment (H_1) et (H_2).
  - *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons I_n construit vérifiant $(H_1) - (H_2)$ et construisons alors I_{n+1} vérifiant ces deux hypothèses.*
    On considère le milieu $\frac{a_n+b_n}{2}$ du segment I_n. Puisque I_n contient une infinité de termes de la suite, c'est aussi le cas pour l'une des deux moitiés de I_n : $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$; choisissons ainsi l'une de ces moitiés et notons $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ce segment [1].
    Le segment I_{n+1} vérifie donc (H_2) et, par construction, il vérifie aussi (H_1) puisque $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{\frac{b-a}{2^n}}{2} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.
    Ceci achève donc la récurrence et donc la construction de la suite de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2).

- *Etape 2 : Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.* On vérifie les deux conditions :
  - *Monotonie.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ ce qui se traduit par $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et assure que (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.
  - *La différence tend vers 0.* On a $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$.

  Par conséquent, en tant que suites adjacentes, (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ.

- *Etape 3. Construction d'une suite extraite convergente.* On construit par récurrence une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, comme suit :
  - On pose $\varphi(0) = 0$.
  - Supposons avoir défini φ jusqu'au rang n. On pose alors [2] $\varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n) \mid u_k \in I_{n+1}\}$

  Ainsi construite, la suite $(u_{\varphi(n)})$ vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{\varphi(n)} \in I_n$ c'est à dire

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$$

  et le théorème d'encadrement assure que cette sous-suite converge vers ℓ.

Cas d'une suite complexe.

Soit $z \in \mathbb{C}^N$, bornée, cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| \leq M$.
L'idée est de se ramener au cas réel en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $z_n = u_n + iv_n$ avec $u_n, v_n \in \mathbb{R}$.

- La suite réelle (u_n) est bornée (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = |\mathrm{Re}(z_n)| \leq |z_n| \leq M$) donc, d'après le cas réel, on peut considérer une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel α.
- La suite w définie par $w_n = v_{\varphi(n)}$ n'est pas forcément convergente, mais il s'agit d'une suite réelle bornée donc on peut en extraire une sous suite qui converge : il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $w_{\psi(n)} \to \beta$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{\psi(n)} = v_{\varphi\circ\psi(n)}$ (en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $w_k = v_{\varphi(k)}$ donc, en prenant $k = \psi(n)$ il vient $w_{\psi(n)} = v_{\varphi(\psi(n))} = v_{\varphi\circ\psi(n)}$).
- La suite extraite $z_{\varphi\circ\psi(n)}$ converge alors vers $\alpha + i\beta$. En effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$z_{\varphi\circ\psi(n)} = u_{\varphi\circ\psi(n)} + iv_{\varphi\circ\psi(n)} = u_{\varphi\circ\psi(n)} + iw_{\psi(n)}$$

  et on sait que $w_{\psi(n)} \to \beta$ par construction de $(w_{\psi(n)})$. et que $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to \alpha$ comme sous-suite de la suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers α.

$\square$

---

1. Précisément on distingue deux cas :
- Si $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ est infini, on pose $I_{n+1} = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ (*i.e.* $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$) ;
- Si $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ est fini alors on pose $I_{n+1} = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ (*i.e.* $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$).

2. Remarquons que le minimum considéré existe bien : l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in I_{n+1}\}$ est infini donc possède des éléments strictement supérieurs à $\varphi(n)$: par conséquent $\{k > \varphi(n) \mid u_k \in I_{n+1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc possède un plus petit élément.