II Décomposition en éléments simples : la théorie

1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

• **Admis.** Il existe un corps noté $\mathbb{K}(X)$ tel que tout élément $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$.

i) Dans $\mathbb{K}(X)$ $\quad \dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ ssi $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$. *ii)* $\mathbb{K}(X)$ contient $\mathbb{K}[X]$ via l'identification $P = \dfrac{P}{1}$

iii) Les opérations dans $\mathbb{K}(X)$ sont définies par : • $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} + \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 Q_2 + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2}}$ • $\boxed{\dfrac{P_1}{Q_1} \times \dfrac{P_2}{Q_2} \underset{\text{déf.}}{=} \dfrac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}}$

Exemple 1 — Dans $\mathbb{R}(X)$ simplifier : **a)** $F = \frac{X}{X(1+X)}$ **b)** $G = \frac{X^3-X}{(X^2-3X+2)(X^2+1)}$

• **Vocabulaire.** On appelle *forme irréductible de* $F \in \mathbb{K}(X)$ toute écriture de la forme $F = \dfrac{P}{Q}$ où $P \wedge Q = 1$

Définition 1

Le degré de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est : $\deg F \underset{\text{déf.}}{=}$

2 Zéros et pôles

Définition 2

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *irréductible* • $a \in \mathbb{K}$ est un zéro de F si : • $a \in \mathbb{K}$ est un pôle de F si :

• **Vocabulaire.** La *fonction rationnelle* associée est $\widetilde{F} : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ définie sur $\mathbb{K}$ privé des pôles de F.

Exercice 1 — Dans la définition précédente, a peut-il être à la fois zéro et pôle de F ?

Exemple 2 — Quels sont les zéros et pôles de $F = \frac{X^5-4X^4+3X^3}{X^3-5X^2+6X} \in \mathbb{R}(X)$?

3 Partie entière

Théorème 1

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

• •

En pratique : calcul de la partie entière

Le polynôme E, appelé la partie entière de F, est le quotient de la division euclidienne de A par B

Exemple 3 — Donner les parties entières de **a)** $\frac{X^4-3X^3+5X^2-1}{X^2-3X+1}$ **b)** $\frac{X^3-2}{X^4-1}$ **c)** X^2+3X

Exercice 2 — Démontrer l'existence et l'unicité du couple (E, G) du théorème.

4 Les gros théorèmes (admis)

• **Cadre.** • $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec $P \wedge Q = 1$ • E est sa partie entière • $a_1, \ldots, a_k$ ses pôles de multiplicités $m_1, \ldots, m_k$

■ **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.** Dans ce cas Q est scindé sur $\mathbb{C}$ et sa factorisation s'écrit :

Théorème 2

F s'écrit de manière unique sous la forme :

Exemple 4 — Appliquer le théorème pour les fractions : **a)** $F = \frac{X^{10}+16}{(X-1)^3 X(X^2+1)^2}$ **b)** $G = \frac{X^8+1}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$

■ **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.** Dans ce cas la factorisation du dénominateur dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit : $Q = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{\ell} (X^2 + p_i X + q_i)^{n_i}$

Théorème 3

F s'écrit de manière unique sous la forme : $\quad F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{i,j} X + b_{i,j}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j}$
où les $\alpha_{i,j}, a_{i,j}, b_{i,j}$ sont des réels.

Exemple 5 — Appliquer le théorème pour les fractions : **a)** $G = \frac{X^8+1}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$ **b)** $H = \frac{1}{X^3(1+X+X^2)^2}$