1 Télescopage

Théorème 1 : Sommes et produits télescopiques

Exercice 1 — Etablir les deux formules ci-dessus.

SF 3 : calculer une somme en utilisant un télescopage

Exemple 1 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes : **a)** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k})$ **b)** $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

2 Exemples de changements d'indice et de regroupements de termes

Le décalage

Afin d'obtenir une somme indexée à partir de 0, on a effectué le changement d'indice « $k = j+1$ ».

Exercice 2 — Compléter **a)** $\sum_{k=3}^{n} a_{k+2} = \sum_{j=} a_j$ **b)** $\sum_{k=4}^{n} a_k = \sum_{j=1} a = $ **c)** $\sum_{k=3}^{n+2} a_k = \sum_{j=}^{n} a$

SF 1 : effectuer un changement d'indice

Exemple 2 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une expression simple de : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.

Le renversement « $k = n-j$ »

- **Remarque.** Pour une somme indexée à partir de 1 :

Exemple 3 — **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. **b)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $T_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k})$

Regroupements de termes

Exemple 4 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k k^2$.

Exemple 5 — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}$.

3 Des sommes à connaître

Théorème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $\sum_{k=0}^{n} k =$ • $\sum_{k=0}^{n} k^2 =$

Exercice 3 ♥ — Démontrer la formule sur $\sum_{k=0}^{n} k^2$ en commençant par développer $(k+1)^3 - k^3$.

Théorème 3 : Sommes géométriques

Pour tout $q \in \mathbb{C}$ et tous $m \leq n$: $\sum_{k=m}^{n} q^k =$ En particulier, si $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} q^k =$

Exercice 4 ♥ — Démontrer la première formule ci-dessus en calculant $(1-q) \sum_{k=m}^{n} q^k$.

Théorème 4 : Factorisation de $a^n - b^n$

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $a^n - b^n =$

Exemple 6 — **a)** $a^3 - b^3 =$ **b)** $a^4 - b^4 =$

Exercice 5 ♥ — Démontrer la formule ci-dessus en calculant $(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.