

| Développements limités usuels                                                                                   |                                                                                                                       |                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Développement limité à tout ordre                                                                               | En particulier                                                                                                        | Equivalent                                                               |
| $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$                                        | $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ | $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$                             |
| $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$                     | $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$                                    | $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$             |
| $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$               | $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$                                   | $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$                              |
| $\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$               | $\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$                       | $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ |
| $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$         | $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$                      | $\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$                 |
| $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$                                         | $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$                                              |                                                                          |
| $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$                                  | $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$                                              |                                                                          |
| $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$                         | $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$                   | $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$                            |
| $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$                        | $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$                   | $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$             |
|                                                                                                                 | $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$                                                     | $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$                              |
| $\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$ | $\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$                    | $\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$             |

• **Remarque.** Même si  $\alpha$  n'est pas un entier naturel, on pose pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $\binom{\alpha}{k} \underset{\text{déf.}}{=}$

**Exemple 1** — Calculer :  $\binom{\frac{1}{2}}{3}$  et  $\binom{-2}{3}$ .

**Exemple 2** — Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 de : **a)**  $\sqrt{1+x}$  **b)**  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ .

**Exemple 3** — Donner les développements limités à l'ordre 3 en 0 de :  $\frac{1}{(1+x)^2}$ .