## 1 Définitions

- **Cadre.** $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ sont des nombres réels ou complexes.

- **Notations.** • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=}$ • $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=}$

- **Retenir.** • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k =$ • $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k =$

- **Remarque.** On définit de même $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k$ pour tous $a_m,\dots,a_n$ tels que $m \leq n$.

**Exemple 1** — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+n}$

- **Sommes/produits de termes constants.**

Pour tout complexe $c \in \mathbb{C}$ : • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c =$ • $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} c =$

## 2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

- **Remarque.** La lettre $k$ intervenant dans la définition est une variable *muette*. Par exemple :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 =$$

**Exemple 2** ☢ ***Attention*** ☢ *en présence de la lettre $n$* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Vrai ou faux ? **a)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = n!$ **b)** $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} j = n!$ **c)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} n = n!$ **d)** $\displaystyle\prod_{n=1}^{n} n = n!$

## 3 Généralisation

- **Cadre.** Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par un ensemble fini non vide $I$
  - $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ désigne la somme de tous les éléments de la famille
  - $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ désigne le produit de tous les éléments de la famille
- **Convention des sommes et produits vides.** On convient que : • $\displaystyle\sum_{i\in\varnothing} a_i =$ • $\displaystyle\prod_{i\in\varnothing} a_i =$

## 4 Règles de base

**Rayer les relations fausses**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$ | $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$ | $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$ | $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k^p$ |
| $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ | $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ | $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \quad \prod_{k=1}^{n} a_k$ | $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p = \prod_{k=1}^{n} a_k^p$ |

**Exercice 1** — On suppose $a_1,\dots,a_n > 0$. Compléter : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln a_k =$

**Exercice 2** — On suppose que $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ et que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Montrer qu'alors $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.