IV Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Cadre.** • $f : D \to \mathbb{R}$ est **monotone** • On étudie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Rappels

- **Intervalle stable par f.** Un intervalle $I \subset D$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$ *i.e.* : $\forall x \in I, \quad f(x) \in I$
- **En pratique.** Si I est stable par f et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes dans I.

Théorème 1 : Critère « $f(\ell) = \ell$ »

Si (u_n) converge vers $\ell \in D$ et si $\boxed{f \text{ est continue en } \ell}$, alors ℓ est un *point fixe* de f : $\boxed{f(\ell) = \ell}$

Attention Ce théorème ne prouve jamais la convergence de la suite

2 Cas où f est croissante

Théorème 2

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$.

Si f croissante sur I alors :

Exercice 1 — On suppose f croissante sur I. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

SF 11 : Etudier la limite de (u_n) lorsque f est croissante

Exemple 1 — Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$

Exemple 2 — **1.** Soit $u_0 > 0$. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$

2. Même question lorsque $u_0 < 0$.

3 Cas où f est décroissante

Théorème 3

Soit I un intervalle stable par f et $u_0 \in I$.

Si f décroissante sur I alors :

Exercice 2 — On suppose f décroissante sur I. Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire.

Théorème 4 : Admis provisoirement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 3 *Un cas où f décroît* — Etudier la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$