# II Suites extraites

## 1 Définition

**Définition 1**

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $v$ est une sous-suite ou suite extraite de $u$ si :

- **Remarque.** Dit autrement : $v =$

**Exemple 1 —**

1. Montrer que les suites constantes $v = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $u = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $v = (4n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suite $u = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Théorème 1**

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

**Exercice 1** — Démontrer le théorème précédent par récurrence sur $n$.

## 2 Limite et suites extraites

- **Cadre.** • $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ • $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

**Théorème 2**

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors :

**SF 9 : Prouver qu'une suite n'a pas de limite**

**Exemple 2** — Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)$ n'a pas de limite.

**Exercice 2** *Divergence des suites géométriques de raison inférieure ou égale à $-1$* —
**a)** Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite **b)** Soit $q < -1$. Montrer que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

**Théorème 3**

## 3 Deux applications classiques : suite harmonique, suite harmonique alternée

**Exemple 3 ♥** *La suite harmonique diverge...* — Pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ **b)** En déduire : $H_n \to +\infty$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que $u$ et $v$ sont adjacentes.

**Exemple 4 ♥** *... la suite harmonique alternée converge* — Pour tout entier $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
**a)** Prouver que $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes. **b)** Etudier la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

## 4 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

**Théorème 4**

Toute suite bornée :

**Exercice 3** *Principe de démonstration par dichotomie* — Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a \leq u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

- $I_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$