III Complément : extension aux suites complexes

Définition 1

Une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

Définition 2

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemple 1 — Soit $q \in \mathbb{C}$. Si $|q| < 1$, alors : $\quad q^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Théorème 1

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{C}$. Il y a équivalence entre :

i) $u_n \to \ell$ *ii)* $\mathrm{Re}(u_n) \to \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(u_n) \to \mathrm{Im}(\ell)$.

Exemple 2 — Etudier la convergence de la suite complexe définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 3\overline{u}_n}{5}.$

Ce qui reste	Ce qui ne reste pas

Exercice 1 — Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas d'une suite complexe.