II Suites particulières

1 Suites arithmético-géométriques

Définition 1

Une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

Théorème 1 : Terme général d'une suite arithmético-géométrique

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.

-
-

Exercice 1 — Démontrer le théorème précédent.

SF 1 : Calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

1. On introduit l'unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. La suite v de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a : *on en déduit une expression de* v_n.
3. *En calculant* α, on en déduit une expression de $u_n = v_n + \alpha$.

Exemple 1 — Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}u_n$

Exemple 2 — Déterminer le terme général de la suite u définie par $u_1 = 0$ et et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 2u_n + 1$

2 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux

- **Cadre.** • $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}^*$ sont donnés • $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifie la relation $(\star)$ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Exercice 2 — Pour quels $\lambda \in \mathbb{K}^*$ la suite géométrique $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie-t-elle : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$?

Définition 2

L'*équation caractéristique* de la suite est l'équation du second degré : $(\mathscr{C})$ $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$

Exercice 3 — On suppose que le discriminant de l'équation caractéristique $(\mathscr{C})$ est nul et on note λ_0 la solution double de $(\mathscr{C})$. Vérifier que la suite $u = (n\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aussi la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Exercice 4 — On pose $E = \left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$. Montrer que $\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est bijective.

Théorème 2 : Expression du terme général u_n en fonction de n

• $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Discriminant Δ de $(\mathscr{C})$	Racines de $(\mathscr{C})$	Il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta = 0$	λ_0	

• $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Discriminant Δ de $(\mathscr{C})$	Racines de $(\mathscr{C})$	Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2	
$\Delta = 0$	λ_0	
$\Delta < 0$	$re^{\pm i\theta}$	

Exemple 3 SF 2 — On suppose que $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 4 SF 2 — On suppose que $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
Déterminer deux constantes r et θ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = r^{n+3}\cos\big((n+1)\theta\big)$

Exemple 5 SF 2 — On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$. Montrer que u est périodique