Objectif de cette note

Etant donné $(a,b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \qquad (\star)$$

On cherche une expression de u_n en fonction de n.

Equation caractétistique

On rappelle que l'équation caractéristique est l'équation du second degré d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \qquad (\mathscr{C})$$

Cette équation apparaît naturellement lorsque l'on cherche des suites géométriques vérifiant $(\star)$

Théorème 1

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La suite (λ^n) vérifie la relation de récurrence $(\star)$ ssi λ est solution de $(\mathscr{C})$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda^{n+2} - a\lambda^{n+1} - b\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - a\lambda - b).$$

□

Structure de l'ensemble des solutions de $(\star)$

Notons E l'ensemble de toutes les suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(\star)$.
Il n'est pas difficile de montrer que E est *stable par combinaison linéaires* au sens suivant :

Théorème 2

Soient $u, v \in E$.
Pour tous $A, B \in \mathbb{K}$: $\quad (Au_n + Bv_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Enfin, une suite de (E) est entièrement déterminée par ses deux premiers termes :

Théorème 3

L'application $\begin{array}{rccl}\Phi : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & u & \longmapsto & (u_0, u_1)\end{array}$ est bijective.

• Démonstration.

- *Injectivité.* Soient $u, v \in E$ telles que : $\quad \Phi(u) = \Phi(v)$.
  Par hypothèse : $\quad u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$.
  Grâce à la relation $(\star)$ on en déduit par récurrence double que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- *Surjectivité.* Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
  On définit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ par : $\quad u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta$ puis $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Par construction : $\quad u \in E \quad$ et $\quad \Phi(u) = (\alpha, \beta)$.

Expression du terme général lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 4

- Si $(\mathscr{C})$ a deux racines distinctes λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n\,.$$
- Si $(\mathscr{C})$ a une racine double λ_0 dans $\mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (A + Bn)\lambda_0^n\,.$$

Démonstration.
• *Idée : d'après le théorème 3, deux suites de E sont égales si elles ont les mêmes termes de rang 0 et 1. Dans chacun des cas, on choisit A et B de sorte que (u_n) coïncide au rangs 0 et 1 avec $(A\lambda_1^n + B\lambda_2^n)$ (pour le premier cas) ou avec $((A+Bn)\lambda_0^n)$ (pour le second).*
• *Cas où $\mathscr{C}$ possède deux racines distinctes λ_1 et λ_2.* Notons alors qu'il existe un unique couple (A,B) dans $\mathbb{C}^2$ tel que $\begin{cases} A + B = u_0 \\ A\lambda_1 + B\lambda_2 = u_1 \end{cases}$.
En effet, il s'agit d'un système de deux équations d'inconnue (A,B) ayant pour déterminant $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$.
A et B étant ainsi choisis, la suite (v_n) définie par $v_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ coïncide avec (u_n) aux rangs 0 et 1. De plus (v_n) vérifie la relation $(\star)$ (d'après les deux premiers constats). Par conséquent, les suites u et v sont égales (d'après le dernier constat).
• *Cas où $\mathscr{C}$ possède une racine double λ_0.* Notons que cette racine est non nulle (car $(a,b) \neq (0,0)$). De plus, la suite (λ_0^n) vérifie $(\star)$. Il en va de même de la suite $(n\lambda_0^n)$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(n+2)\lambda_0^{n+2} &- a(n+1)\lambda_0^{n+1} - bn\lambda_0^n \\ &= \lambda_0^n\Big(n(\lambda_0^2 - a\lambda_0 - b) + \lambda_0(2\lambda_0 - a)\Big)\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est nulle car $\lambda_0^2 - a\lambda_0 - b = 0$ (puisque λ_0 est racine de $(\mathscr{C})$) et car $\lambda_0 = -a/2$ (ceci puisque λ_0 est la racine double de $\mathscr{C}$).
Par conséquent, toute suite de la forme $(A\lambda_0^n + Bn\lambda_0^n)$ vérifie $(\star)$. Aussi, il est possible de trouver A et B tels que $(A\lambda_0^n + Bn\lambda_0^n)$ coïncide avec (u_n) aux deux premiers rangs. Il suffit en effet de choisir $A = u_0$ puis $B = \frac{u_1}{\lambda_0} - u_0$. Comme précédemment, il en résulte que $u_n = A\lambda_0^n + Bn\lambda_0^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Expression du terme général lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On ne démontre ici que le cas où $\mathscr{C}$ possède un discriminant strictement négatif (le cas d'un discriminant strictement postif et celui d'un discriminant nul se traitent de même que dans $\mathbb{C}$).

Théorème 5

Si $(\mathscr{C})$ a deux racines non réelles $\lambda = re^{i\theta}$ et $\overline{\lambda}$ dans $\mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))\,.$$

Démonstration. La suite (λ^n) vérifie encore la relation $(\star)$ (dans $\mathbb{C}$). Aussi, puisque a et b sont réels, on voit en prenant la partie réelle ou imaginaire dans $(\star)$ que les suites $(\mathrm{Re}(\lambda^n)) = (r^n\cos(n\theta))$ et $(\mathrm{Im}(\lambda^n)) = (r^n\sin(n\theta))$ vérifient elles aussi cette relation de récurrence. D'après nos premiers constat, il en va de même de toute suite de la forme $(Ar^n\cos(n\theta) + Br^n\sin(n\theta))$. Aussi, on peut trouver A et B tels que $(Ar^n\cos(n\theta) + Br^n\sin(n\theta))$ coïncide avec (u_n) aux deux premiers rangs. Il suffit en effet de choisir $A = u_0$ puis B tel que $Ar\cos\theta + Br\sin\theta = u_1$ (c'est possible puisque $\theta \neq 0\ [\pi]$, ceci car λ n'est pas réelle). Il s'ensuit comme précédemment que $u_n = Ar^n\cos(n\theta) + Br^n\sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □