Objectif de cette note

Etant donnés $a, b \in \mathbb{K}$, on cherche ici à résoudre l'équation différentielle homogène du second ordre :

$$y'' + ay' + by = 0. \qquad (E_0)$$

On rappelle que l'équation caractéristique est l'équation du second degré d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0\,. \qquad (\mathscr{C})$$

On note Δ le discriminant de $(\mathscr{C})$ et λ_1 et λ_2 ses racines complexes, éventuellement confondues. Lorsque $\Delta = 0$, on notera λ_0 la racine double (dans ce cas : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$). On sait que $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$ et donc $2\lambda_1 + a = \lambda_1 - \lambda_2$.

Résolution de (E_0) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 1

1. Si $(\mathscr{C})$ a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :
$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}\,.$$
2. Si $(\mathscr{C})$ a une racine double λ_0 , alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :
$$y(t) = (At + B)e^{\lambda_0 t}, \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}\,.$$

Démonstration. L'idée est de se ramener au cas d'une équation d'ordre 1 par un changement de fonction inconnue.

Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deux fois dérivable. La fonction $z : t \mapsto e^{-\lambda_1 t} y(t)$ est elle-même deux fois dérivable et, en dérivant deux fois la relation $y = e^{\lambda_1 t} z$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y''(t)+&ay'(t) + by(t) \\ &= \Big(z''(t) + (2\lambda_1 + a)z'(t) + (\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)z(t)\Big)e^{\lambda_1 t} \\ &= \Big(z''(t) + (2\lambda_1 + a)z'(t)\Big)e^{\lambda_1 t} \\ &= \Big(z''(t) + (\lambda_1 - \lambda_2)z'(t)\Big)e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

Ainsi y est solution de (E_0) si et seulement si z' vérifie l'équation du premier ordre $(z')' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$.

- *Cas où* $\Delta \neq 0$. Dans ce cas, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ et z vérifie $(z')' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = Ce^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$
ou encore (en primitivant) si et seulement si il existe $A \in \mathbb{C}$ telle que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + A$$
En multipliant par $e^{\lambda_1 t}$ on en déduit que les solutions de (E_0) sont exactement les fonctions de la forme $y : t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ où les constantes A et $B = \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1}$ décrivent $\mathbb{C}$ lorsque A, C décrivent $\mathbb{C}$.
- *Cas où* $\Delta = 0$. Dans ce cas $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ et l'équation sur z s'écrit alors $z'' = 0$, qui équivaut à :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = At + B$$
où $A, B \in \mathbb{C}$ sont des constantes quelconques. En multipliant par $e^{\lambda_0 t}$, on en déduit que les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto (At + B)e^{\lambda_0 t}$, où A, B sont des constantes complexes quelconques.

□

Résolution de (E_0) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Théorème 2

1. Si $(\mathscr{C})$ a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :
$$y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
2. Si $(\mathscr{C})$ a une racine double $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :
$$y(t) = (At + B)e^{\lambda_0 t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$
3. Si $(\mathscr{C})$ a deux racines non-réelles conjuguées $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme :
$$y(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t), \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Les deux premiers points se traitent comme le cas complexe.
Traitons le cas où $(\mathscr{C})$ possède deux racines conjuguées $\alpha \pm i\beta$.
•Soit y une solution réelle de (E_0). Il s'agit en particulier d'une solution complexe de (E_0) donc il existe $C, D \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{\alpha t + i\beta t} + De^{\alpha t - i\beta t} \\ &= e^{\alpha t}\Big((C + D)\cos(\beta t) + i(C - D)\sin(\beta t)\Big) \\ &= e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t) \end{aligned}$$

où l'on a posé : $\quad A = C + D \quad$ et $\quad B = i(C - D)$
Reste à montrer que A et B sont réels.
C'est le cas parce que y est à valeurs réelles et que :

- $A = y(0) \in \mathbb{R}$.
- $B = y(\frac{\pi}{2\beta})e^{-\alpha\frac{\pi}{2\beta}} \in \mathbb{R}$.

•Réciproquement soient $A, B \in \mathbb{R}$.
Montrons que $y : t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$ est bien solution de (E_0).
Par les formules d'Euler :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos\beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2i}$$

En remplaçant $\cos\beta t$ et $\sin\beta t$ par ces expressions on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = Ce^{\alpha t + i\beta t} + De^{\alpha t - i\beta t}$$

pour certaines constantes $C, D \in \mathbb{C}$.
Le théorème 1 assure alors que y est bien une solution (complexe) de (E_0). □